

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 2
Innleveringsfrist: 19. oktober klokka 14:00
Antall oppgaver: 2

Løsningsforslag

Oppgave 1

- a) Skriptet starter med å la **Sum** være 0, så blir det for hver iterasjon lagt til i^2 der i går fra og med 1 til og med 5. Summen er altså

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{i=1}^5 i^2 = 55 \quad .$$

- b) I den første summen, skal vi bare legge til i for hver iterasjon. Men summen skal gå til $i = 100$. Skriptet må derfor endres til

```
Sum=0;  
for i=1:100  
    Sum=Sum+i;  
end  
Sum
```

Når vi kjører skriptet i Octave, får vi svaret 5050:

```
> SummeSkript  
Sum = 5050
```

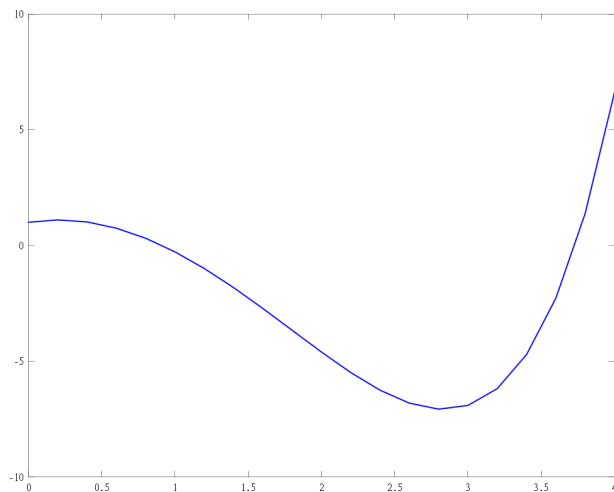
(Her har vi gitt skriptet navnet **SummeSkript.m**)

Den neste summen, $\sum_{n=1}^5 1/n$, finner vi ved å endre linje to til **'for i=1:5'** og linje tre til **'Sum=Sum+1/i;'** (om variabelen heter i eller n spiller ingen rolle; det er selve summen vi vil ha). Svaret blir 2.2833. Legg merke til at Octave ikke er i stand til å gi det eksakte svaret, som er $137/60$ ¹.

Den siste summen går fra 2 til 5, så linje to blir **'for i=2:5'**, og linje tre blir **'Sum=Sum+3^(1/i);'**. Vi kjører skriptet i Octave,

```
> rehash('SummeSkript.m')  
> SummeSkript  
Sum = 5.7361
```

¹Retnok kan du, ved å skrive **'format long'** få ut flere desimaler enn det Octave i utgangspunktet skriver til skjerm.



Figur 1: Plot av funksjonen gitt på tabellform i oppg. 2a.

Oppgave 2

- a) Vi lastar ned fila (pass på at du er i samme katalog som fila `Data.dat` ligger i):

```
> mat=load('Data.dat')
```

Her har vi gitt tabellen vi lasta ned navnet `mat`. Denne tabellen, eller *matrisa*, har to rekker og 21 søyler:

```
> size(mat)
```

```
ans =
```

```
2    21
```

Vi henter ut rad 1 og kaller vektoren vi da får for `x`, og vi henter ut rad 2 og kaller den `y`. Og så plotter vi:

```
> x=mat(1,:);  
> y=mat(2,:);  
> plot(x,y,'linewidth',2)
```

Plottet er vist i figur 1.

- b) Først finner vi ut hvilken, om noen, x -verdi i tabellen som er lik 2:

```
> find(x==2)
ans = 11
```

Altså er den 11. x -verdien lik 2. Dette kan vi forsvåvidt lett se av tabellen, men om den hadde vært større, hadde nok `find`-funksjonen vært å foretrekke.

Vi bruker formlene og regner ut:

$$\begin{aligned}h &= x_2 - x_1 = 0.2 \\f'(2) &= f'(x_{11}) \approx \frac{f(x_{12}) - f(x_{10})}{2h} = \frac{-5.4950 - (-3.6704)}{2 \cdot 0.2} \approx -4.5616 \\f''(2) &= f''(x_{11}) \approx \frac{f(x_{12}) - 2f(x_{11}) + f(x_{10}))}{h^2} = \\&\quad \frac{-5.49499 - 2 \cdot (-4.61094) - 3.67035}{0.2^2} = 1.4137 \\f^{(3)}(2) &= f^{(3)}(x_{11}) \approx \frac{f(x_{13}) - 2f(x_{12}) + 2f(x_{10}) - f(x_9))}{2h^3} = \dots = 7.4632 \\f^{(4)}(2) &= f^{(4)}(x_{11}) \approx \frac{f(x_{13}) - 4f(x_{12}) + 6f(x_{11}) - 4f(x_{10}) + f(x_9))}{h^4} = \dots = 7.4385\end{aligned}$$

Selve utregningene gjør vi nok enklest i Octave:

```
> h=x(2)-x(1)
h = 0.20000
> Deriv1=(y(12)-y(10))/(2*h)
Deriv1 = -4.5616
> Deriv2=(y(12)-2*y(11)+y(10))/h^2
Deriv2 = 1.4137
> Deriv3=(y(13)-2*y(12)+2*y(10)-y(9))/(2*h^3)
Deriv3 = 7.4632
> Deriv4=(y(13)-4*y(12)+6*y(11)-4*y(10)+y(9))/h^4
Deriv4 = 7.4385
```

c) Taylor-polynomet av 4. orden omkring $x = 2$ er definert slik:

$$P_4(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(2)(x-2)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(2)(x-2)^4 \quad .$$

Vi setter inn estimatene overfor og får

$$\begin{aligned}P_4(x) \approx & -4.61094 - 4.561585(x-2) + \frac{1.4137}{2}(x-2)^2 + \frac{7.4632}{6}(x-2)^3 + \frac{7.4385}{24}(x-2)^4 = \\& \underline{\underline{-4.61094 - 4.561585(x-2) + 0.70686(x-2)^2 + 1.12439(x-2)^3 + 0.30994(x-2)^4}}\end{aligned}$$

Vi lager ei funksjonfil for dette polynomet:

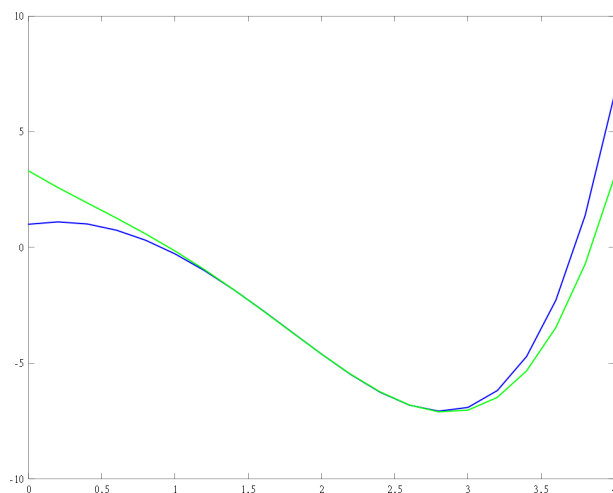
```
function F=Tpoly4(x)

% Funksjonen er et 4. grads Taylor-polynom omkring x=2 for
% ett gitt datasett. De deriverte som inngår er beregnet ut fra
% "endelig differanse"-formler.

F=-4.61094 -4.561585*(x-2)+0.70686*(x-2).^2+...
1.12439*(x-2).^3 + 0.30994*(x-2).^4;
```

Her ser vi forresten hvordan man kan bryte ei linje i m-filer på ein slik måte at Octave leser det som éi linje.

I figur 2 er plottet av dette polynomet vist sammen med plottet fra figur 1. Vi ser at kurvene samsvarer ganske bra omkring $x = 2$ – ikke så bra i lenger borte fra denne x -verdien. Når avstanden mellom x og 2 blir større enn 1, er ikke Taylor-polynomet noen god tilnærming.



Figur 2: Plot av funksjonen sammen med et tilnærma Taylor-polynom basert på numeriske estimator av de deriverte i $x = 2$. Taylor-polynomet er plotta i grønt.

d) Vi regner ut $f^{(n)}(2)$ for n verdier fra og med 0 til og med 4:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - 3x^2 \\ f(2) &= e^2 - 3 \cdot 2^2 = e^2 - 12 = -(12 - e^2) \approx -4.6109 \\ f'(x) &= e^x - 3 \cdot 2x = e^x - 6x \\ f'(2) &= e^2 - 12 = -(12 - e^2) \approx -4.6109 \\ f''(x) &= e^x - 6 \\ f''(2) &= e^2 - 6 \approx 1.3891 \\ f^{(3)}(x) &= f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = e^x \\ f^{(3)}(2) &= f^{(4)}(2) = e^2 \approx 7.3891 \end{aligned}$$

Vi ser at de deriverte vi estimerte i b) og c), ligger rimelig nære disse eksakte verdiene. Men sammenfallende er de ikke. Det eksakte Taylor-polynomet blir

$$P_4(x) = e^2 - 12 - (12 - e^2)(x - 2) + \frac{e^2 - 6}{2!}(x - 2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x - 2)^3 + \frac{e^2}{4!}(x - 2)^4$$

e) Feilleddet er gitt ved

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x - 2)^5 = \frac{e^c}{120}(x - 2)^5 \quad ,$$

der c skal ligge mellom x og 2. Vi krever at

$$|R_4(x)| < 0.1$$

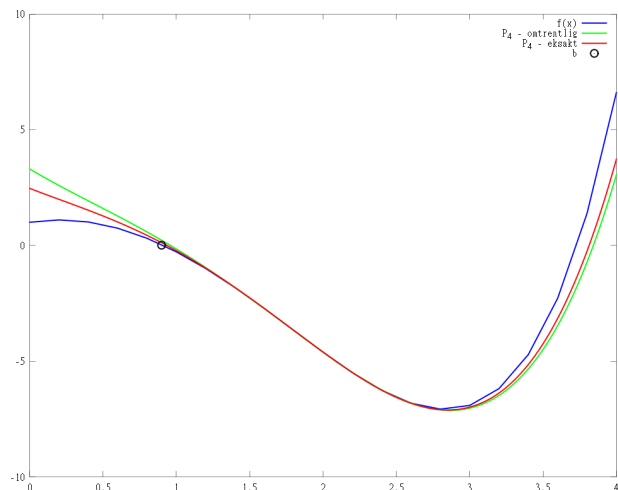
og får (for $x < 2$) at

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^c}{120}(x - 2)^5 \right| &< \frac{e^2}{120}(2 - x)^5 < 0.1 \\ (2 - x)^5 &< \frac{12}{e^2} \\ 2 - x &< \sqrt[5]{\frac{12}{e^2}} \\ x &> 2 - \sqrt[5]{\frac{12}{e^2}} \approx 0.898 \end{aligned}$$

Her har vi brukt at e^x er en strengt voksende funksjon. Vi har også brukt at x^5 er en strengt voksende funksjon og at $2 - x$ er positiv. Vi får altså

$$b = 2 - \sqrt[5]{\frac{12}{e^2}} \approx 0.898 \quad .$$

I figur 3 har vi vist grafen til $f(x)$ sammen med begge Taylor-polynomene – både det omtrentlige fra deloppgave c) og det eksakte fra deloppgave d). Vi har også markert b som en svart sirkel på x -aksen.



Figur 3: Grafene til $f(x)$ (blå) sammen med Taylor-polynomene fra c) (grønn) og d) (rød). b -verdien vi kom fram til i deloppgave e) er markert med en svart sirkel.

Oppgave 3

- a) $V(x) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 0.4x + 20$, $D_V = [0, 7]$.
 Funksjonsuttrykket er satt sammen av en lineær funksjon med stigningstall 0.4 som skjærer y -aksen i 20 og en sinus-funksjon med amplitude 6 og periode $2\pi/(\pi/7) = 14$ – altså det dobbelte av lengda av definisjonsmengda. Grafen vil se omtrent ut som i figur 6. Vi ser mellom annet at randpunktene vil være minimalpunkter og at der er ett maksimalpunkt, som vil ligge noe til høyre for midten.

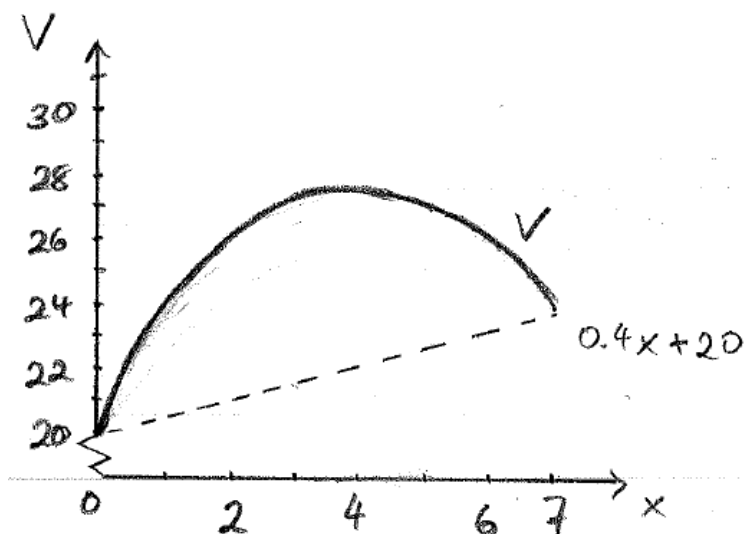
- b) Ekstremalpunktene kan være randpunkter eller punkter der $f'(x)$ skifter fortegn.

Funksjonsverdier i randpunktene:

$$\begin{aligned} V(0) &= 6 \sin 0 + 0.4 \cdot 0 + 20 = 20 \\ V(7) &= 6 \sin \pi + 0.4 \cdot 7 + 20 = 22.8 \end{aligned}$$

Vi deriverer,

$$V'(x) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) \cdot \frac{\pi}{7} + 0.4 \quad ,$$



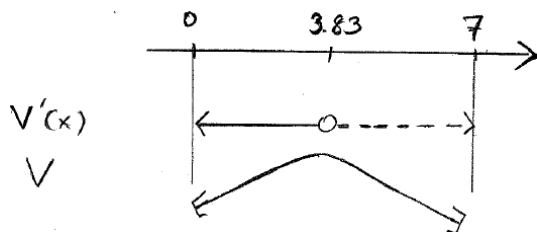
Figur 4: Skisse av grafen til funksjonen $V(x)$ fra oppg. 2a).

og finner nullpunktene til V' :

$$\begin{aligned}
 V'(x) &= 0 \\
 6 \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) \cdot \frac{\pi}{7} + 0.4 &= 0 \\
 \frac{6\pi}{7} \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) &= -0.4 \\
 \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) &= -0.4 \cdot \frac{7}{6\pi} \approx -0.1485 \\
 \arccos(-0.1485) &\approx 1.7199 \\
 \frac{\pi}{7}x &= 1.7199 + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{7}x = -1.7199 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\
 x &= \frac{7}{\pi}(1.7199 + n \cdot 2\pi) \quad \vee \quad x = \frac{7}{\pi}(-1.7199 + n \cdot 2\pi) \\
 x &= 3.8322 + 14n \quad \vee \quad x = -3.8322 + 14n
 \end{aligned}$$

Siden $x \in [0, 7]$, har V' bare ett nullpunkt: $x = 3.8322$. Den tilsvarende funksjonsverdien er $V(3.8322) \approx 27.466$. Siden V' er kontinuerlig, vil V' ha uendra fortegn på intervallet $[0, 3.8322]$ og på intervallet $[3.8322, 7]$. Det er derfor nok å regne ut verdien av V' for en verdi i hver av disse to intervallene for å bestemme fortegnet til V' i hvert av disse intervallene.

$$\begin{aligned}
 V'(0) &= 6 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{7} + 0.4 > 0 \\
 V'(7) &= 6 \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{7} + 0.4 < 0
 \end{aligned}$$

Figur 5: Fortegnsskjema for $V'(x)$ i oppg. 2b).

Siden V' endrer fortegn fra positiv til negativ ved $x \approx 3.8322$, har vi et *maksimalpunkt* her. Se fortegnsskjemaet i figur 5. Dette gir oss disse ekstremalpunktene:

Lokale minimalpunkter: $(0, 20)$ og $(7, 22.8)$. Vi ser at det første av disse er det globale minimalpunktet.

Lokalt – og globalt – maksimalpunkt (omtrent): $(3.8322, 27.466) \approx (3.83, 27.47)$.

Altså er varmetapet størst 3.83 m fra hjørnet til venstre. Her er varmetapet 27.47 W/m^2 . Varmetapet er minst i venstre hjørne ($x = 0$).

- c) $W(x) = 20e^{-(x-4)^4} + 6\sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 0.4x + 20$, $D_W = [0, 7]$.
Slik kan grafen kan plottes i Octave:

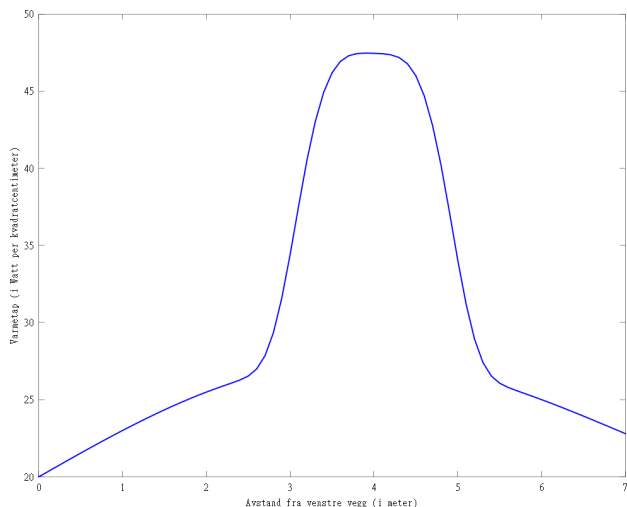
```
> x=0:.1:7;
> W=20*exp(-(x-4).^4)+6*sin(pi*x/7)+.4*x+20;
> plot(x,W,'linewidth',2)
> xlabel('Avstand fra venstre vegg (i meter)')
> ylabel('Varmetap (i Watt per kvadratmeter)')
```

Resultatet er vist i figur 6. Av figuren ser vi at varmetapet er størst omkring $x = 4$. Her ser varmetapet ut til å være omtrent 47.5. (Vi kan finne bedre estimater om vi forstørrer figuren.)

- d) Vi ser at det globale maksimalpunktet er bestemt av at $W'(x) = 0$. Dette gir:

$$\begin{aligned} 20 \cdot e^{-(x-4)^4} \cdot (-4(x-4)^3) \cdot 1 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) \frac{\pi}{7} + 0.4 &= 0 \\ -80(x-4)^3 e^{-(x-4)^4} + \frac{6\pi}{7} \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 0.4 &= 0 \end{aligned}$$

- e) Likninga over er ei såkalt *transcendent* likning – den lar seg ikke løse med papir og blyant. Men vi kan finne ei løsning som er så nøyaktig vi ønsker ved hjelp av Octave.



Figur 6: Varmetapet langs veggen det er snakk om i oppg. 3 c).

Newtons metode går ut på å løse likninga $f(x) = 0$ numerisk ved å iterere på uttrykket

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad .$$

Vi må velge en x_0 , og vi itererer til vi er fornøyd med nøyaktigheten i løsninga.

Vi kaller høgresida i likninga vi kom fram til i d) for $f(x)$. Vi trenger også den deriverte av denne:

$$\begin{aligned} f(x) &= -80(x-4)^3 e^{-(x-4)^4} + \frac{6\pi}{7} \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 0.4 \\ f'(x) &= -80 \cdot 3(x-4)^2 \cdot 1 \cdot e^{-(x-4)^4} - 80 \cdot (x-4)^3 e^{-(x-4)^4} (-4)(x-4)^3 \cdot 1 \\ &\quad - \frac{6\pi}{7} \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) \frac{\pi}{7} + 0 = \\ &\quad e^{-(x-4)^4} (320(x-4)^6 - 240(x-2)^2) - \frac{6\pi^2}{49} \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) \end{aligned}$$

Vi lager funksjonsfiler for disse funksjonene. I vår implementering har vi kalt disse funksjonsfilene **Ffunk.m** og **FfunkDeriv.m**. Videre lager vi skript for Newtons metode:

```
x0=4;          % Start-gjetning
Pres=1e-4;     % Presisjon
```

```

x0ld=1e2;      % x0ld: Den forige x-verdien, angir en vilkårlig verdi først
x=x0;          % Først setter vi x til å være x0
its=0;         % its teller antall interasjoner (starter på 0)

% while-løkke som gjentas så lenge iterasjonen
% gir en endring på x større enn Pres:
while abs(x-x0ld) > Pres
    x0ld=x;      % Lar forige x-verdi bli x0ld
    % Iterasjonsformelen fra Newtons metode:
    x=x0ld-Ffunk(x0ld)/FfunkDeriv(x0ld)
    its=its+1;   % Antall iterasjoner økes med én
end

% Skriver løsningen og antall iterasjoner til skjerm:
Loesning=x
Iterasjoner=its

```

Ved å utelate semikolon i linje 12 her får vi skrevet x_n til skjerm for hver n . Vi har kalt skriptet `NewtonMetode.m`. Når vi kjører det i Octave, får vi:

```

> NewtonMetode
x = 3.8309
x = 3.8792
x = 3.8973
x = 3.8997
x = 3.8998
Loesning = 3.8998
Iterasjoner = 5

```

Varmetapet er altså størst for $x = 3.8998 \approx \underline{3.900}$. Vi finner varmetapet ved å sette løsningen inn i funksjonen $W(x)$:

$$W(3.8998) \approx 47.46 \quad .$$

Varmetapet er altså 47.46 W/m^2 på det meste.

- f) I forige deloppgave så vi at vi oppnådde ønsket presisjon, 10^{-4} , etter 5 iterasjoner.