

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 2
Innleveringsfrist: 19. oktober klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Noen av disse oppgavene løses ved hjelp av “papir og blyant”, mens andre oppgaver løses ved hjelp av Octave (eller Matlab) – og til noen oppgaver trenger du både papir og blyant og pc. Alle svar skal begrunnes. I besvarelsen din skal alle relevante plott og m-filer, funksjonsfiler og skript, være med. “Lim inn” alle relevante utregninger og kommandoer som er utført i Octave (eller Matlab). Besvarelsen kan være en blanding av håndskrevne sider og data-utskrifter, eller den kan være skrevet i et tekstbehandlingsprogram (OpenOffice, Word, LaTeX etc.) med figurer, kommandoer og m-filer limt inn.

Husk å skrive tydelig **navn**, **studentnummer** og **klasse** i besvarelsen.

Oppgave 1

- a) Dette ukommenterte skriptet regner ut en sum:

```
Sum=0;  
for i=1:5  
    Sum=Sum+i^2;  
end  
Sum
```

Skriv denne summen med alle ledd eksplisitt og ved hjelp av Σ -symbolet. Hva blir svaret?

- b) Regn ut følgende summer i Octave (eller Matlab) ved hjelp av **for**-løkker – som over:

$$\sum_{i=1}^{100} i, \quad \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} \quad \text{og} \quad \sum_{i=2}^5 3^{1/i} .$$

Oppgave 2

Funksjonsverdiene til funksjonen $f(x)$ er gitt for visse verdier av x :

0.00000	0.20000	0.40000	0.60000	0.80000	1.00000	1.20000
1.00000	1.10140	1.01182	0.74212	0.30554	-0.28172	-0.99988
1.40000	1.60000	1.80000	2.00000	2.20000	2.40000	2.60000
-1.82480	-2.72697	-3.67035	-4.61094	-5.49499	-6.25682	-6.81626

2.80000	3.00000	3.20000	3.40000	3.60000	3.80000	4.00000
-7.07535	-6.91446	-6.18747	-4.71590	-2.28177	1.38118	6.59815

I disse tre radene med x - og f -verdier, er x -verdiene øverst og de tilsvarende f -verdiene nederst. Vi ser her at avstanden mellom to etterfølgende x -verdier alltid er den samme. Tabellen over kan lastes ned på Fronter. Fila heter **Data.dat**.

- a) Skriv av eller last ned tabellen (vi anbefaler sistnevnte), og lag et plott av f i Octave (eller Matlab) med utgangspunkt i disse verdiene.
- b) Vi har allerede sett denne formelen for numerisk derivasjon:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad ,$$

eller, hvis vi har et sett med x -verdier og tilsvarende f -verdier, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ og $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ der $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \dots = h$, kan vi skrive formelen over som

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{2h} \quad ,$$

der h er avstanden mellom to etterfølgende x -verdier i tabellen. For høyere ordens deriverte har vi (mellom andre) disse formlene:

$$\begin{aligned} f''(x_n) &\approx \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1}))}{h^2} \\ f^{(3)}(x_n) &\approx \frac{f(x_{n+2}) - 2f(x_{n+1}) + 2f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))}{2h^3} \\ f^{(4)}(x_n) &\approx \frac{f(x_{n+2}) - 4f(x_{n+1}) + 6f(x_n) - 4f(x_{n-1}) + f(x_{n-2}))}{h^4} \end{aligned}$$

Disse kan du ta for gitt; du skal ikke forklare hvordan vi kommer fram til dem. Man kan si noe om hvor stor feilen kan være i disse estimatene, men det skal vi ikke komme inn på her¹. Formler av denne typen kaller vi *endelig differanse*-formler (engelsk: *finite difference*).

Bruk formlene over til å estimere $f^{(k)}(2)$ for k -verdier fra og med 1 til og med 4. (Her kan det være nyttig å bruke `find`-funksjonen for å finne ut hvilken x -verdi i tabellen, om noen, som er lik 2.)

- c) Vi har ikke gitt noe funksjonsuttrykk for f her. Men man kan konstruere et uttrykk som tilnærmer funksjonen for eksempel ved å lage et Taylor-polynom. Bruk blant annet svarene fra deloppgave b) til å konstruere et (omtrentlig) Taylor-polynom av 4. orden for f om 2, og plott dette sammen med punktene fra tabellen.

Ut fra plottet, vurdér i hvor stor grad 4.-gradspolynomet faller sammen med punktene fra tabellen.

¹For spesielt interesserte kan vi nevne at feilen er avgrensa av et tall proporsjonalt med h^2 for alle disse estimatene.

- d) Gitt at f er en elementær funksjon gitt ved $f(x) = e^x - 3x^2$, konstruér det eksakte Taylor-polynomiet av 4. orden, P_4 , til f om 2.
- e) Bruk formelen for feilen (restleddet) til å bestemme et tall $b < 2$ som er slik at differansen mellom Taylor-polynomiet fra deloppgave d) og funksjonen $f(x)$ er mindre enn 0.1 i absoluttverdi for alle x -verdier mellom b og 2.

Oppgave 3

Figur 1a) er ei skisse av en trevegg. Vi lar x vere avstanden, i meter, fra venstre hjørne langs veggen. Vi tenker oss at man har funnet at varmetapet gjennom veggen, målt i W/m^2 (Watt per kvadratmeter), ved romtemperatur inne og 10°C ute kan tinærmes ved funksjonen

$$V(x) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 0.4x + 20, \quad D_V = [0, 7] \quad .$$

(Vi går ut fra at varmetapet ikke varierer i høgderetninga langs veggen – bare i lengderetninga.)



Figur 1: Figuren viser en yttervegg – uten (a) og med (b) vindu. Avstanden langs veggen fra venstre hjørne er x meter.

- a) Skissér grafen til V – uten å bruke pc. (Ei *skisse* av en graf, trenger ikke være like nøyaktig som en tegning av en graf.)
- b) Finn alle ekstremalpunkter til V .
Hvor er varmetapet størst og minst under forutsetningene gitt over?
- c) Vi tenker oss nå at en tilsvarende vegg har et relativt dårlig isolert vindu som går fra golv til tak. (Se figur 1b).) For denne veggen er varmetapet gitt ved denne funksjonen:

$$W(x) = 20 e^{-(x-4)^4} + 6 \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 0.4x + 20, \quad D_W = [0, 7]$$

(under samme forutsetninger som over).

Plot grafen til funksjonen i Octave (eller Matlab), og bruk plottet til å bestemme ein tilnærma verdi for det globale maksimalpunktet til W .

- d) Sett opp ei likning som bestemmer det globale maksimalunktet.
- e) Bruk Newtons metode til å finne ut hvor på veggen varmetapet er størst. Feilen i det numeriske svaret skal ikke være større enn 10^{-4} . Metoden skal implementeres i Octave (eller Matlab).
Hvor stort er varmetapet her?
- f) Hvor mange iterasjoner var det nødvendig å gjøre for å få ønsket nøyaktighet i svaret i e)?