

FORMELSAMLING FOR MATEMATIKK 1000

A. POTENSAR OG LOGARITMAR

1. Rekneregler for potensar.

- a) $a^p a^q = a^{p+q}$
- b) $a^p / a^q = a^{p-q}$
- c) $a^{-q} = 1/a^q$
- d) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- e) $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$
- f) $a^p b^p = (ab)^p$
- g) $a^p / b^p = (a/b)^p$

2. Rekneregler for logaritmar.

- a) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- b) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
- c) $\ln(a^p) = p \cdot \ln a$
- d) $\log_a(b) = \ln(b)/\ln(a)$

B. TRIGONOMETRI

1. Nokre eksakte verdier.

u	u	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
0	0°	0	1	0
$\pi/6$	30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	—

2. Trigonometriske formalar.

- a) $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$
- b) $\tan u = \sin u / \cos u$
- c) $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$
- d) $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
- e) $\sin(u + n2\pi) = \sin u, \quad n \in \mathbb{Z}$
- f) $\cos(u + n2\pi) = \cos u, \quad n \in \mathbb{Z}$
- g) $\tan(u + n\pi) = \tan u, \quad n \in \mathbb{Z}$
- h) $\sin(-u) = -\sin u$
- i) $\cos(-u) = \cos u$
- j) $\tan(-u) = -\tan u$
- k) $\cos^2 u = (1 + \cos(2u))/2$
- l) $\sin^2 u = (1 - \cos(2u))/2$

3. Harmoniske svingingar.

- a) Bølgefunksjon: $a \sin(k(x - c)) + d$
- b) Periode: $p = 2\pi/k$
- c) Amplitude: $|a|$
- d) Jamvektslinje: $y = d$

C. GEOMETRI

1. Likningar.

- a) Rett linje: $y - y_0 = a(x - x_0)$
- b) Sirkel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

2. Vektorar.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- b) $||[x, y, z]|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

D. KOMPLEKSE TAL

1. Skrivemåte.

- a) $z = a + ib = r(\cos \phi + i \sin \phi) = re^{i\phi}$
- b) $r^2 = a^2 + b^2$
- c) $\tan \phi = b/a$

2. Formalar for polarform.

- a) $r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$
- b) $\frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$
- c) $(re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}$

E. DERIVASJON

1. Definisjon.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Derivasjonsreglar.

- a) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- b) $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$
- c) $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$ eller $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

3. Elementære funksjonar.

- a) $(c)' = 0$
- b) $(x^r)' = rx^{r-1}$
- c) $(e^x)' = e^x$
- d) $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$
- e) $(\ln x)' = 1/x$
- f) $(\sin x)' = \cos x$
- g) $(\cos x)' = -\sin x$
- h) $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$
- i) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$
- j) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4. Numerisk derivasjon.

Midpunktsformelen:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

F. GRENSEVERDIAR

1. L'Hôpitals regel.

Når $f(a) = g(a) = 0$ eller både $f(x)$ og $g(x) \rightarrow \pm\infty$ når $x \rightarrow a$, så er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

G. KURVEDRØFTING

1. Monotoniegenskaper.

- a) Når $f'(x) > 0$ for $x \in (a, b)$, så er f strengt veksende i $[a, b]$
- b) Når $f'(x) < 0$ for $x \in (a, b)$, så er f strengt avtakende i $[a, b]$

H. INTEGRASJON

1. Definisjon av bestemt integral.

- a) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\mathcal{P},S}$
 $\mathcal{R}_{\mathcal{P},S} = \sum_{i=0}^n f(x_i^*) \Delta x_i$

2. Integrasjonsreglar, ubest. int.

- a) $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$
- b) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- c) $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$
- d) $\int f(u)u' dx = \int f(u) du$
- e) Dersom $F'(x) = f(x)$:
 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

3. Integrasjonsreglar, best. int.

- a) $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$
- b) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- c) $\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$
- d) $\int_a^b f(u)u' dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$

4. Ubest. int., elementære funk.

- a) $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, r \neq -1$
- b) $\int 1/x dx = \ln|x| + C$
- c) $\int e^x dx = e^x + C$
- d) $\int a^x dx = a^x / \ln a + C$
- e) $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- f) $\int \cos x dx = \sin x + C$
- g) $\int 1/\cos^2 x dx = \tan x + C$
- h) $\int 1/\sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x + C$
- i) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

5. Volum av omdreingslekamar.

- a) Om x -aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$
- b) Om y -aksen: $V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$

6. Bogelengde.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

7. Arealet av rotasjonsflate.

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

8. Gjennomsnitt.

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

9. Numerisk integrasjon.

- a) Trapesmetoden:
 $\int_a^b f(x) dx \approx T_n$ der
 $T_n = \Delta x (\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n))$
- b) Simpsons metode:
 $S_{2m} = \frac{\Delta x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))$

I. NEWTONS METODE

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

J. MATRISER

1. Determinant for 2×2 -matrise.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Inverse matriser.

a) For ei 2×2 -matrise:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

b) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$

3. Cramers regel.

Når A er ei invertibel matrise, så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løysing gitt ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisa vi får ved å bytte ut kolonne i i A med $\mathbf{b}$.

K. DIFFERENSIALLIKNINGAR

1. Løysing av likn. $y'' + py' + qy = 0$.

- a) $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ (to røter)
- b) $y = e^{rx}(A + Bx)$ (ei rot)
- c) $y = e^{ax}(A \cos(bx) + B \sin(bx))$
($r = a \pm ib$)

2. Numerisk løysing.

a) Eulers metode:

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h$$

der $y'(x) = F(x, y)$ og $x_n = x_0 + nh$

b) Eulers midpunktmetode:

$$y_{n+1} = y_n + F(\hat{x}_n, \hat{y}_n)h \text{ der}$$

$$\hat{x}_n = x_n + h/2 \text{ og } \hat{y}_n = y_n + F(x_n, y_n)h/2$$

L. TAYLOR-POLYNOM

1. n'te Taylor polynom til funksjonen f i punktet a .

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

2. Taylor sin formel med restledd.

La f vere $n + 1$ gonger deriverbar med $f^{(n+1)}$ kontinuerleg på eit ope intervall som inneheld a og x . Då finst ein c mellom a og x slik at

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

der

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$