

Oppgave 1

a) i)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{2x} \\ f'(x) &= (x^2)' \cdot e^{2x} + x^2 (e^{2x})' = 2x e^{2x} + x^2 e^{2x} \cdot (2x)' = \\ &= 2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x} = \underline{\underline{2x e^{2x} (1 + x)}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(\sin x) + x^2 \\ g'(x) &= \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' + 2x = \frac{\cos x}{\sin x} + 2x = \frac{1}{\tan x} + 2x \end{aligned}$$

b) i)

$$\int \left(x + \frac{1}{2x-1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C$$

For å anti-derivere det siste leddet har vi bruka reglane

$$\int 1/x dx = \ln |x| + C \text{ og}$$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(ax+b) dx = 1/a \cdot F(ax+b) + C.$$

ii)

$$\int \cos x \sin^3 x dx$$

Variabelbyte:

$$x = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad dx = \frac{1}{\cos x} du$$

$$\int \cos x \sin^3 x dx = \int \cos x u^3 \frac{1}{\cos x} du = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} \sin^4 x + C}}$$

c) i)

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

Det fyrste leddet på høgre side blir null sidan integranden er ein odde funksjon og integrasjonsintervallet er symmetrisk om 0. Ein kan også sjå at det blir 0 ved variabelbyte:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad du = \frac{1}{2x} dx \\ u(-1) &= (-1)^2 + 1 = 2 \quad \text{og} \quad u(1) = 1^2 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Det gir:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{u(-1)}^{u(1)} \frac{x}{u} \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int_2^2 \frac{1}{u} du = 0$$

Sidan $\int 1/(x^2 + 1) dx = \arctan x + C$, får vi at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx &= 0 + [\arctan x]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \\ 2 \arctan 1 &= 2 \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} .\end{aligned}$$

ii)

$$\int_0^1 x e^{2x} dx$$

Delvis integrasjon: $\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$.

$$u = x \Rightarrow x' = 1$$

$$v' = e^{2x} \Leftarrow v = e^{2x}/2.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{2x} dx &= \left[x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \\ \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{e^2+1}{4}}} .\end{aligned}$$

d) i)

$$e^{x^2-4x} = 1 = e^0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad x - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x = 4}}$$

ii)

$$(1-i)z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\begin{aligned}z &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2}{1+1} = \\ &\underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i}}\end{aligned}$$

På polarform:

$$1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, \quad 1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3} \text{ slik at}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\pi/4} z = 2e^{i\pi/3}$$

$$z = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i[\pi/3-(-\pi/4)]} = \underline{\underline{\sqrt{2}e^{i7\pi/12}}}$$

Oppgave 2

Newtons metode går ut på å løyse likninga $f(x) = 0$ ved å iterere på formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad .$$

Om vi samanliknar dette uttrykket med linje 6 i skriptet, ser vi at må ha at $f(x) = e^x + \sin x + 1.6x - 7$ og $f'(x) = e^x + \cos x + 1.6$. Om vi deriverar uttrykket for $f(x)$, ser vi at vi fatisk får $e^x + \cos x + 1.6$ for $f'(x)$, så dette stemmer. Likninga vi forsøker å løyse er altså

$$\underline{e^x + \sin x + 1.6x - 7 = 0} \quad .$$

Presisjonen i løysinga er bestemt av parameteren **pres**. Av **while**-løkka ser vi at iterasjonen stoppar når $|x_{n+1} - x_n| \leq \text{pres}$. I linje 3 er **pres** sett til å vere 0.1. Om vi vél ein lågare (positiv) verdi for **pres**, bør vi få eit meir nøyaktig svar.

Oppgave 3

- a) Vi skal finne den maksimale verdien g kan ha. Maksimalverdiar kan vere randpunkt eller punkt der den deriverte skiftar forteikn frå positiv til negativ. Vi deriverar:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 0.1(e^{0.1x} \cdot 0.1(10x - x^2) + e^{0.1x}(10 - 2x)) = \\ &= 1 + 0.1e^{0.1x} + (x - 0.1x^2 + 10 - 2x) = 1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) \end{aligned}$$

Sidan $g'(0) = 1 + 0.1 \cdot 10 = 2 > 0$, vil ikkje randpunktet i $x = 0$ vere eit maksimalpunkt. g' må difor endre forteikn for at g skal vere maksimal. Sidan både g og g' er kontinuerlege, må $g'(x)$ vere 0 der dette skjer. Altså:

$$\underline{1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) = 0} \quad .$$

- b)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - kv = -k(v + g/k) \\ \frac{dv}{v + g/k} &= -k dt \\ \int \frac{dv}{v + g/k} &= \int -k dt \\ \ln|v + g/k| &= -kt + C_1 \\ v + g/k &= Ce^{-kt} \quad (C = \pm e^{C_1}) \\ v &= Ce^{-kt} - \frac{g}{k} = Ce^{-0.1t} - \frac{10}{0.1} = Ce^{-0.1t} - 100 \end{aligned}$$

Initialkrav: $v(0) = v_0 = 15$ (med m/s som eining). Det gir:

$$\begin{aligned} 15 &= Ce^0 - 100 \\ C &= 15 + 100 = 115 \end{aligned}$$

Vi får at

$$v(t) = 115 e^{-0.1t} - 100 \quad .$$

- c) Vi let $h(t)$ vere høgda kula har over bakken, målt i meter, etter t sekund. Vi veit at $h(0) = 2$ og at $h'(t) = v(t)$ der $v(t)$ er gitt over. Dermed har vi at¹

$$\begin{aligned} h(t) &= \int v(t) dt = \int (115 e^{-0.1t} - 100) dt = -\frac{115}{0.1} e^{-0.1t} - 100t + C = \\ &= -1150 e^{-0.1t} - 100t + C \quad . \end{aligned}$$

Vi får bestemt C ved initialkravet:

$$\begin{aligned} h(0) &= 2 \\ -1150 e^0 - 0 + C &= 2 \\ C &= 2 + 1150 = 1152 \quad . \end{aligned}$$

Dermed får vi at $h(t) = -1150 e^{-0.1t} - 100t + 1152$. Når kula treff bakke er høgda null – altså skal vi ha at $h(t) = 0$. Det gir denne likninga:

$$\underline{\underline{-1150 e^{-0.1t} - 100t + 1152 = 0 \quad .}}$$

Oppgave 4

a)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

A er ei 3×3 -matrise, B er ei 2×3 -matrise. Sidan dei har ulike format, er ikkje summen av dei, $A + B$, definert. Vidare, sidan A har 3 søyler og B har 2 rekker, er heller ikkje produktet AB definert.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -8 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

¹Alternativt kan ein implementere initialkravet direkte ved å sette opp uttrykket $h(t) - h(0) = \int_0^t v(t') dt'$.

$$\begin{aligned} 2B - 3C &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 9 & 15 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 0-3 & -2-(-6) \\ 8-9 & 6-15 & 4-(-6) \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & -9 & 10 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -(7 \cdot (-1) - 1 \cdot (-6)) = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Determinanten til A er ulik 0. Difor er A invertibel.

c) Vi rekkereduserar totalmatrisa for likningssystemet til trappeform:

$$\begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 3 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & a & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & a-6 & 3-2b \end{bmatrix}$$

i) Dersom $a-6 \neq 0$, vil vi få eit leiande tal både i søyle 1 og 2, og x_1 og x_2 vil bli eintydig bestemt. Vi får altså eintydig løysing når $a \neq 6$.Dersom $a = 6$, vil totalmatrisa på trappeform sjå slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 3-2b \end{bmatrix} \quad .$$

For at dette skal tilsvare eit konsistent likningssystem, må vi kreve at $3-2b = 0$, eller at $b = 3/2$. Vi ser også at x_2 vil bli verande ubestemt sidan der ikkje er noko leiande tal i søyle 2.ii) Vi får uendeleg mange løysingar når $a = 6$ og $b = 3/2$.iii) Dersom $3-2b \neq 0$, vil likningssystemet bli inkonsistent. Vi har altså inga løysing når $a = 6$ og $b \neq 3/2$.

Oppgåve 5

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	2.000	2.301	2.243	1.938	1.546

a) Vi brukar midtpunktsformelen for numerisk derivasjon:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad .$$

Her er $h = 0.5$. Vi får

$$f'(0.5) \approx \frac{f(1) - f(0)}{2 \cdot 0.5} = 2.243 - 2.000 = \underline{\underline{0.243}} \quad .$$

b) Vi brukar trapesmetoden:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &\approx h \left(\frac{1}{2}f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \frac{1}{2}f(2) \right) = \\ 0.5 (0.5 \cdot 2.000 + 2.301 + 2.243 + 1.938 + 0.5 \cdot 1.546) &= 4.1275 \approx \underline{\underline{4.128}} \quad . \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos(0.9x) + x \\ f'(x) &= 2(-\sin(0.9x)) \cdot 0.90 + 1 = -1.8 \sin(0.9x) + 1 \\ f'(0.5) &= -1.8 \sin(0.9 \cdot 0.5) + 1 = \underline{\underline{-1.8 \sin 0.45 + 1}} \approx 0.2171 \\ \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (2 \cos(0.9x) + x) dx = \left[\frac{2}{0.9} \sin(0.9x) + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = \\ &= \frac{20}{9} \sin(0.9 \cdot 2) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 0 = \underline{\underline{\frac{20}{9} \sin 1.8 + 2}} \approx 4.1641 \end{aligned}$$

Feilen i estimatet frå a) blir $|0.243 - 0.2171| = 0.0259 \approx \underline{\underline{0.026}}$.

Relativ feil: $0.0259/0.2171 \approx 12\%$.

Feilen i estimatet frå b) blir $|4.1275 - 4.1641| = 0.0366 \approx \underline{\underline{0.037}}$.

Relativ feil: $0.0366/4.1641 \approx 0.88\%$.

Oppgave 6

a)

$$\begin{aligned} y' + \frac{\sin x}{y} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\sin x}{y} \\ y dy &= -\sin x dx \\ \int y dy &= \int -\sin x dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= \cos x + C_1 \\ y^2 &= 2 \cos x + C \quad (C = 2C_1) \\ y &= \underline{\underline{\pm \sqrt{2 \cos x + C}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}y' &= x \sin x^2 \\y &= \int x \sin x^2 dx\end{aligned}$$

Variabelbyte:

$$\begin{aligned}u &= x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du \\y &= \int x \sin x^2 dx = \int x \sin u \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C \quad .\end{aligned}$$

Initialkravet $y(0) = 1$ gir at

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \cos 0 + C &= 1 \\C &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad .\end{aligned}$$

Dermed får vi løysinga

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{3}{2} \quad .}}$$

c) Eulers metode går ut på estimere løysinga av eit 1. ordens initialverdiproblem, gitt på forma

$$y' = F(x, y) \quad \text{med initialkravet} \quad y(x_0) = y_0$$

Ein estimerar $y(x_n)$ slik

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + F(x_n, y_n) \cdot h \quad \text{der} \\x_n &= x_0 + n \cdot h \quad .\end{aligned}$$

y_0 er gitt ved initialkravet. For liten nok h vil vi ha at $y_n \approx y(x_n)$.

I skriptet ser vi at initialkravet er gitt i linje 1 og 3: $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$. Om vi samanliknar formelen over med linje 15 og 16, ser vi at

$$F(x_n, y_n) = \sqrt{y_n} + \cos x_n \quad .$$

(Variabelen y tilsvaerar y' .) Initialverdieproblemet som skriptet freistar å løyse er altså

$$\underline{\underline{y' = \sqrt{y} + \cos x, \quad y(0) = 1 \quad .}}$$

Oppgave 7

Vi skal bestemme matrisa A slik at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Vi veit at A oppfyller

$$A = [T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)]$$

der einingsvektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Vi veit at transformasjonen T er lineær. Difor har vi at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= T(2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2) = 2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \\ T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right) &= T(5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 5T(\mathbf{e}_1) + 3T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Sidan $T(\mathbf{x})$ skal ligge i $\mathbb{R}^3$, kan vi skrive

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad .$$

Om vi set dette inn i likningane over, får vi tre likningssystem – eitt for kvar av komponentane. Koeffisientmatrisa er den same for alle tre:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Vi kan løyse alle tre ved å rekkeredusere på ei stor totalmatrise:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 15 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & 2 & 3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Dermed får vi at $x_1 = 9$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$, $x_2 = -15$, $y_2 = -2$ og $z_2 = -3$ slik at

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}} \quad .$$

Alternativt kan vi bruke innsetningsmetoden. Sidan

$$2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

har vi at

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2T(\mathbf{e}_1) .$$

Vi set dette inn i likninga

$$5T(\mathbf{e}_1) + 3T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at vi får at

$$\begin{aligned} 5T(\mathbf{e}_1) + 3 \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2T(\mathbf{e}_1) \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ (5 + 3 \cdot (-2))T(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -T(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ T(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Dermed får vi også bestemt $T(\mathbf{e}_2)$,

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} ,$$

og standardmatrisia blir

$$A = [T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}} .$$

Ein kan også løyse oppgåva ved hjelp av invertering. Vi veit at

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

eller, skrive som ei matriselikning:

$$A \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

slik at

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} .$$