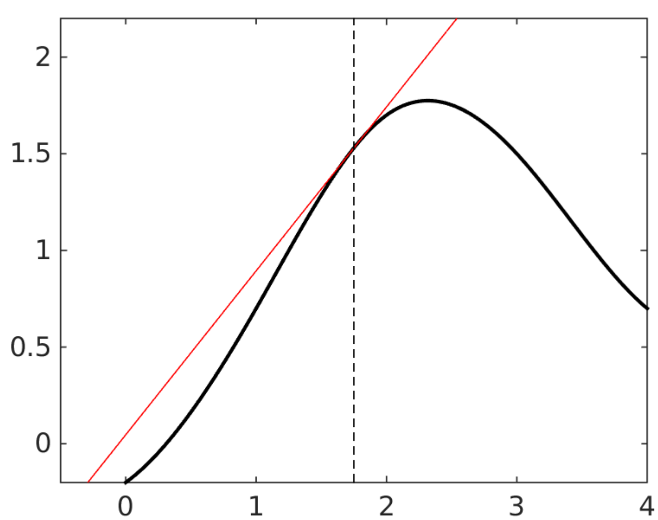
Taylor-polynom

Frå læreboka Kalkulus med én og flere variabler"av Lorentzen, Hole og Lindstrøm, Universitetsforlaget 2003

Tidligere har vi sett på korleis vi kan bruke tangentar til funksjoner til å estimére meir eller mindre kompliserte funksjoner. For å vere litt meir spesifikke: Vi kan bruke funksjonen gitt ved

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

som ei tilnærming til $f(x)$ når x ligg meir eller mindre nær a. Sjå figur 1. Dette



Figur 1: Grafen til ein funksjon saman med tangenten (den lineære tilnærminga) i punktet $a = 1.75$.

kan vere nyttig i mange sammenhengar. Generelt er lineære funksjonar ofte enklare å ha med å gjere enn andre; dersom vi kan erstatte $f(x)$ med $P_1(x)$ utan at det blir for unøyaktig, kan dette ofte gjere matematiske problemer en heil del enklare. Denne tilnærminga ligg til grunn for Newtons metode, til dømes.

Vi kan observere følgande: Når $x = a$, er den lineære tilnærminga $P_1(x)$ og $f(x)$ like; $P_1(a) = f(a)$. Videre ser vi at den deriverte til f og til P_1 er like når

$x = a$; $P_1'(a) = f'(a)$. Om vi fortset denne tankegangen – altså å konstruere polynom der høgare ordens deriverte av polynomet konsekvent er like høgare ordens deriverte av $f(x)$ når $x = a$ – får vi det vi kallar *Taylor-polyom*. Vi definerer slike polynom slik:

Lat f vere (minst) n gonger deriverbar i eit punkt $x = a \in D_f$. *Taylor-polynomet* **av grad n om $x = a$ for f er polynomet P_n av høgst grad n som er slik at**

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad P_n''(a) = f''(a), \quad \cdots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

$P_1(x)$ over er altså Taylor-polynomet av grad $n = 1$. Trivielt får vi også at $P_0 = f(a)$ – ein konstant.

I vår lærebok blir dette med Taylor-polynom gjennomgått i samband med *rekker*. Rekker er noe de vil komme tilbake til i kurset matematikk 2000. Men ut over dette gir Taylor-polynom en nyttig måte å tilnærme funksjoner på, og vi kan godt bruke Taylor-polynom på denne måten heilt utan å kople det til rekker[1] Dette er grunnen til at dette stoffet blir gitt i eit separat notat på denne måten. Med dette sagt, kan ein godt lese om Taylor-polynom i læreboka vår også. Stoffet er å finne i delkapittel 8.6, side 366 til 371.

Teksten og oppgåvene nedanfor er henta fra læreboka nevnt i tittelen over, sidene 107 – 115.

Taylorpolynom av høyere grad

La først f være (minst) to ganger deriverbar for $x = a$. Vi vil finne Taylorpolynomet $P_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ som er slik at

$$P_2(a) = f(a), \quad P_2'(a) = f'(a), \quad P_2''(a) = f''(a). \tag{1}$$

Det viser seg at regningen blir enklere dersom vi skriver P_2 på formen

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2.$$

At dette også er et annengradspolynom ser du lett ved å multiplisere ut $(x-a)^2$. Da ser du også at $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ alltid kan skrives på denne formen. Kravene (1) gir at

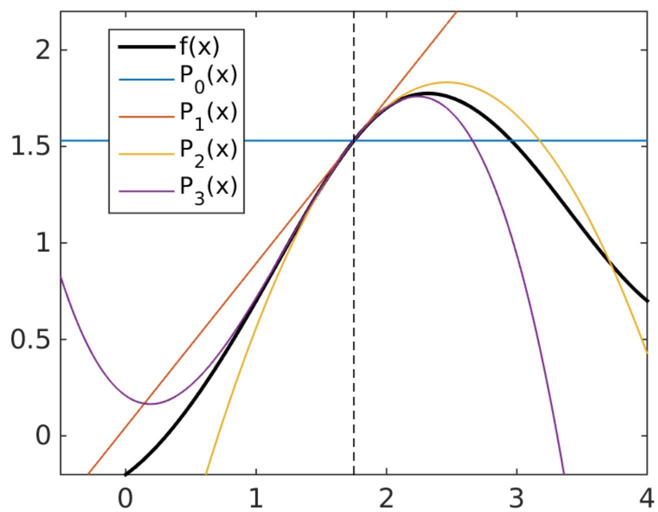
$$\begin{aligned} P_2(a) &= c_0 = f(a) \\ P_2'(a) &= [c_1 + 2c_2(x-a)]_{x=a} = c_1 = f'(a) \\ P_2''(a) &= [2c_2]_{x=a} = 2c_2 = f''(a). \end{aligned}$$

[1] Skilnaden på eit Taylor-polynom og ei Taylor-rekke, er at det siste er eit polynom av grad uendeleg. Ei (konvergent) Taylor-rekke er ikkje lenger ei tilnærming til funksjonen; det *er* funsjonen.

Annengradspolynomet blir dermed

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Grafen til dette polynomet er altså den annengradskurven som smyger seg best intil grafen $y = f(x)$ i nærheten av a. Figur 2 viser grafen til $f(x)$, tangenten i $x = a$ og annengradskurven $y = P_2(x)$ (*Her har eg også tatt med Taylor-polynoma av 0. og 3. grad*). Annengradskurven synes å gi en bedre tilnærmelse



Figur 2: Grafen til den samme funksjonen som i figur 1 sammen med Taylor-polynomene av grad fra og med 0 (en konstant) til og med 3 i punktet $a = 1.75$.

enn tangenten nær a.

For å finne $n$te grads polynomet $P_n(x)$ bruker vi samme teknikk. For $n = 3$ søker vi et polynom

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 \tag{2}$$

som tilfredsstiller kravene i definisjonen. Siden

$$\begin{aligned} P_3'(a) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 \\ P_3''(a) &= 2c_2 + 2\cdot 3(x-a) \\ P_3'''(a) &= 2\cdot 3c_3, \end{aligned}$$

ser vi at

$$P_3(a) = c_0, \quad P_3'(a) = c_1, \quad P_3''(a) = 2c_2, \quad P_3'''(a) = 2\cdot 3c_3.$$

Disse verdiene skal være lik henholdsvis $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ og $f'''(a)$. Dette gir

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{2\cdot 3}.$$

Vi begynner å skimte et mønster i dette. Det ser ut som om

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

der $f^{(0)}(a) = f(a)$ per definisjon, og

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{for} \quad n = 0. \end{cases}$$

Uttrykket $n!$ benyttes i mange sammenhenger. Det leses som n *fakultet.*

At det virkelig er slik, kan en vise ved induksjon[2]. Derved følger:

La f være n ganger deriverbar i punktet a. Da er Taylorpolynomet av grad n om $x = a$ for f gitt ved

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\ & + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ & = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

Vi merker oss at

- i denne sammenhengen definerer vi $0^0 = 1$ fordi $P_n(a)$ skal være $f^{(0)}(a) = f(a)$, også i det siste uttrykket i formelen for P_n.
- $P_n(x)$ alltid eksisterer under forutsetningene i setningen.
- $P_n(x)$ som gitt i setningen, er det eneste $n$te grads Taylorpolynomet av grad n om $x = a$ for f.
- koeffisientene $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ foran leddet $(x-a)^k$ i $P_n(x)$ er uavhengig av av n. Det betyr at hvis du har funnet $P_n(x)$, men heller vi ha $P_{n+2}(x)$, så behøver du ikke beregne alle koeffisientene på nytt. Det holder å finne de to du mangler. Dette er sant fordi vi skriver polynomene $P_n(x)$ på samme form som $P_3(x)$ i (2).

Eksempel

Finn Taylorpolynomene til $f(x) = \sin x$ om punktet $a = 0$.

[2] *Matematisk induksjon* er ein bevisteknikk som kort fortalt går ut på å vise at dersom ein påstand er sann for n, er den også sann for $(n+1)$. Hvis påstanden då er sann for den fyrste verdien av n, må den også være sann for alle n-verdiane som kjem etter.

Løsning: Deriverer vi $f(x) = \sin x$, får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f''''(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Vi er nå tilbake til utgangspunktet, og derivasjonene begynner å gjenta seg. Setter vi inn $x = 0$, ser vi at

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0 = -1, \end{aligned}$$

og dette mønsteret vil gjenta seg: annenhver derivert er null i origo, og de andre veksler mellom 1 og -1. Det gir for eksempel

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 0 + x + 0 = x.$$

Faktisk, siden $c_{2k} = 0$ for alle k, vil $P_{2n-1}(x) = P_{2n}(x)$. Det gir for eksempel

$$\begin{aligned} P_7(x) = P_8(x) &= 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7. \end{aligned}$$

Generelt får vi

$$P_{2n-1}(x) = P_{2n}(x) = \sum_{k=0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Figur 3 viser $\sin x$ og noen av Tylorpolynomene. Taylor-polynomene får med seg flere og flere av "bølgene" til $\sin x$ etter hvert som graden vokser. □

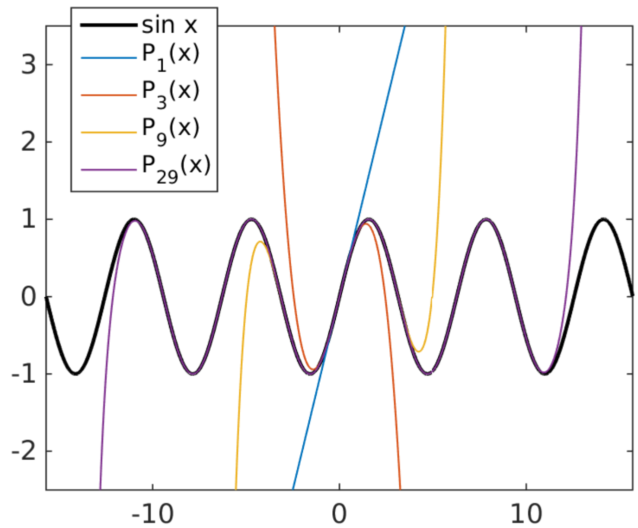
Bemerkning Husker du knepet vi har brukt i uttrykket for $P_{2n-1}(x) = P_{2n}(x)$: faktoren $(-1)^k$ tar vare på at fortegnet til leddene i summen alternerer. Skriv gjerne ut summen for verdier av n for å se at det stemmer.

En helt tilsvarende regning gir Taylorpolynomer for $f(x) = \cos x$ om $x = 0$:

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= P_{2n+1}(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Dette er ganske stilige resultater! De gir oss en mulighet til å *beregne* $\sin x$ og $\cos x$ tilnærmet, noe definisjonene av disse uttrykken ikke gir, unntatt for spesielle verdier av x. Beregningene av $\sin x$ og $\cos x$ i en kalkulator eller datamskin er da også basert på slike Taylorpolynomer.

Det samme gjelder for $\ln x$ i neste eksempel:



Figur 3: Plott av sinus-fuksjonen sammen men noen av Taylorpolynomene for $a = 0$.

Eksempel

Finn Taylorpolynomet til

$$f(x) = \ln x$$

av grad n om punktet $a = 1$.

Løsning: Deriverer vi $f(x) = \ln x$, får vi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x^{-1} & \frac{f'(1)}{1!} &= 1 \\
f''(x) &= -x^{-2} & \frac{f''(1)}{2!} &= -\frac{1}{2} \\
f'''(x) &= 2x^{-3} & \frac{f'''(1)}{3!} &= \frac{1}{3} \\
f''''(x) &= -2 \cdot 3x^{-4} & \frac{f''''(1)}{4!} &= -\frac{1}{4} \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} & \frac{f^{(k)}(1)}{k!} &= \frac{(-1)^{k-1}}{k}
\end{aligned}$$

Siden $f(1) = \ln 1 = 0$, får vi

$$\begin{aligned} P_n(x) =&(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \\ &+ \frac{(x-1)^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Her har vi benyttet at

$$\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{1}{k}$$

ved forkortning. (Venn deg til å skrive ut fakulteter før du forkorter.) $\square$

Feilskranker

Når vi setter $f(x) \approx P_n(x)$, introduserer vi vanligvis en unøyaktighet i bergningene våre. Følgende setning gir oss et uttrykk for feilen vi gjør:

La f være $(n+1)$ ganger deriverbar på et åpent intervall I som inneholder både a og x, og la $f^{(n+1)}$ være kontinuerlig i I. Da er

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

der $P_n(x)$ er Taylorpolynomet til f av grad n om punktet a og

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

for en c mellom x og a.

Uttrykket for $R_n(x)$ kalles gjerne *restleddet* i Taylors formel. Legg merke til så fin struktur det har! Det ser ut som leddet vi trenger for å endre $P_n(x)$ til $P_{n+1}(x)$. Den eneste forskjellen er at at vi tar den $(n+1)$-deriverte i punktet c i stedet for i a. Desverre kjenner vi ikke c som er avhengig av både f, a og x, men uttrykket er nyttig likevel.

Eksempel

Approksimer tallet e ved å bryke Taylorpolynomet $P_6(x)$ til $f(x) = e^x$ av grad 6 om origo, og bruk restleddet R_6 til å finne et intervall som inneholder $f(1) = e$.

Løsning: Den deriverte av $f(x) = e^x$ er $f'(x) = e^x$. Derved er $f^{(k)}(x) = e^x$ og $f^{(k)}(0) = 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Det gir

$$P_6(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}.$$

For $x = 1$ får vi derfor forhåpentligvis

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} \approx 2.71806.$$

For å kunne finne ut om denne approksimasjonen er noe tess, ser vi på restleddet

$$R_6(1) = \frac{e^c}{7!}(1-0)^7 = \frac{e^c}{7!}$$

der c er et (ukjent) tall mellom 0 og 1. Siden e^c vokser med c, betyr dette at $e^0 \leq e^c \leq e^1$. Her er $e^0 = 1$, mens $e^1 < 3$. Derved gjelder

$$\frac{e^0}{7!} = \frac{1}{7!} \leq R_6(1) \leq \frac{3}{7!}$$

der $7! = 5040$. Gjør vi om til desimaltall, får vi $0.00019 < R_6(1) < 0.00060$. Siden

$$e = e^1 = P_6(1) + R_6(1),$$

kan vi garantere at

$$\frac{1957}{720} + \frac{1}{7!} \leq e \leq \frac{1957}{720} + \frac{3}{7!},$$

eller med desimaltall: $2.71825 \leq e \leq 2.71866$. Til sammenligning gjelder $e = 2.7182818$ korrekt avrundet til 7 desimaler. $\square$

Vi kan også bruke restleddet til å finne ut hva slags grad vi skal bruke på Taylorpolynomet for å få god nok approksimasjon i forhold til gitte krav:

Eksempel

Bruk et Taylorpolynom for $f(x) = e^x$ om punktet $a = 0$ for å finne e med feil mindre enn 10^{-7} i absoluttverdi.

Løsning: La oss først bestemme hvilket Taylorpolynom vi vil bruke. Det vil si, hvilken grad n dette polynomet skal ha. Som i det foregående eksempel er

$$e = P_n(1) + R_n(1)$$

der

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dersom vi velger n så stor at $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-7}$, kan vi bruke $e \approx P_n(1)$, for da er $|e - P_n(1)| = |R_n(1)| < 10^{-7}$. Men når er $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-7}$? Dette er ikke en ulikhet vi klarer å løse uten videre. Men vi kan prøve oss frem med forskjellige verdier for n og se hva vi får på venstre side. Verdiene $n = 8$, $n = 9$ og $n = 10$ gir

$$\frac{3}{(8+1)!} < 8.3 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{3}{(9+1)!} < 8.3 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{3}{(10+1)!} < 7.6 \cdot 10^{-8}.$$

Det er klart at enhver $n \geq 10$ vil fungere. Om noen mindre n fungerer kan vi ikke love på basis av dette. Det er heller ikke noe poeng i å velge n større enn nødvendig. Det fører bare til ekstra arbeid når vi skal beregne $P_n(1)$. Vi velger derfor $n = 10$. Det gir

$$e \approx P_{10}(1) = P_6(1) + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = \frac{9\,864\,101}{3\,628\,800} = 2.7182818.$$

Legg merke til at vi ikke runder av til 7 desimaler før i aller siste overgang for ikke å miste presisjon. $\square$

Oppgaver

Trim

1. Beregn verdien av uttrykket

$$\text{a) } 5! \qquad \text{b) } 10! \qquad \text{c) } \frac{10!}{5!} \qquad \text{d) } 10! - 9!$$

2. Forenkle uttrykkene.

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ b) $(n+1)!+n!$ c) $(n+1)!-n!$ d) $\dfrac{2(n!)}{(2n)!}$ e) $\dfrac{n!}{n}$ f) $2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$

3. Anslå verdien av uttrykket ved hjelp av lineær approksimasjon.

a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{24}$ c) $\sqrt[3]{28}$ d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sin\dfrac{\pi}{7}$ f) $\sin(32^\circ)$ g) $\ln 1.1$ h) $e^{0.1}$

4. I denne oppgaven skal du bruke lineær approksimasjon.

a) For å beregne volumet V av en kule, blir radien r målt til 50 cm med en mulig feil opp til ± 1 mm. Anslå hvor stor feilen i V maksimalt kan bli.

b) Hvor nøyaktig må du måle r for å sikre at feilen i V ikke kan bli større enn 100 cm^3?

c) Hvor nøyaktig må du måle r for å sikre at feilen ikke kan bli større enn 0.001% av V?

5. Finn Taylorpolynomet av grad 1, 2 og 3 for f om $x = a$.

a) $f(x) = \tan x,\ a = 0$

b) $f(x) = \sqrt{1+x},\ a = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ a = 1$

e) $f(x) = \sin x,\ a = \pi/4$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ a = 0$

g) $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ a = 1$

h) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d,\ a = 0$

6. Finn Taylorpolynomet av grad 2 om $a = 0$ for f, og sett opp uttrykket for det tilhørende restleddet $R_2(x)$.

a) $f(x) = \sinh x$

b) $f(x) = \cosh x$

c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

d) $f(x) = e^{\cos x}$

7. Finn Taylorpolynomet P_n for f av grad n om $x = a$, og vis ulikhetene for $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

a) $f(x) = e^x, \quad n = 4, \quad a = 0, \quad \dfrac{x^5}{120} \le R_4(x) \le \dfrac{e^x x^5}{120} \quad \text{for} \quad x > 0$

b) $f(x) = \sin x, \quad n = 4, \quad a = 0, \quad |R_4(x)| \le \dfrac{|x|^5}{120}, \quad |R_4(x)| \le \dfrac{|x|^4}{24}$

c) $f(x) = \ln x, \quad n = 3, \quad a = 1, \quad -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^4 \le R_3(x) \le -\dfrac{1}{4}(x-1)^4$ for $\quad 0 < x < 1$

8. Likningen definerer en funksjon $y = f(x)$ implisitt nær punktet (a, b). Finn Taylorpolynomet av grad n om a for denne funksjonen. (Hint: Bruk implisitt derivasjon.)

a) $x^3 + xy - y^5 = 1, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad n = 2$

b) $x^3 + xy - y^5 = 1, \quad a = 0, \quad b = -1, \quad n = 3$

c) $x \sin y + y^2 \cos x + x^2 = 0, \quad a = \pi, \quad b = \pi, \quad n = 2$

Teori

9. Bruk en datamaskin eller en lommeregner til å tegne grafene til funksjonen $f(x) = \ln x$ og Taylor-polynomene av grad 1 til 5 om punktet 1.

10. Taylorpolynomene P_n til $\cos x$ om $a = 0$ er gitt i teori-delen over. Bruk en datamaskin eller en lommeregner til å tegne grafen til $P_{20}(x)$ på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. Sammenlign med grafen til $\cos x$.

11. La $P_n(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n om $a = 0$. Vis at

a) P_n inneholder bare ledd av odde grad dersom f er en odde funksjon.

b) P_n inneholder bare ledd av like (jevn) grad dersom f er en jevn funksjon.

Anvendelser (lineær approksimasjon)

12. For å teste sitt speedometer måler en bilist opp en rett veistrekning på 500 m og markerer denne. Så kjører han med jevn fart inn på strekningen og tar tiden t han bruker på å tilbakelegge de 500 m, mens speedometeret konstant viser 90 km/time. Finn bilens egentlige (konstante) hastighet og anslå usikkerhente i svaret, når bilisten målte $t = 18$ sekunder ± 0.5 sekunder.

13. For å beregne arealet A av en halvkuleformet kuppel, ble omkretsen L rundt den sirkulære grunnflaten av kuppelen målt til 53.9 ± 0.1 m. Anslå et intervall for A ved lineær approksimasjon.

14. Et 25 m langt vannrør med diameter 4 cm isoleres utvendig. Isolasjonen er 0.5 cm tykk. Anslå det totale volumet av den ferdige isolasjonen.

15. Anta at Jorden er en perfekt kule med radius 6000 km. Volumet av iskappene over Arktis og Antarktis er estimert til 36 millioner km^3. Anta at isen smelter og fordeler seg jevnt over hele jordkulen. (Vi ser bort fra at landområder stikker opp over havoverflaten.) Hvor tykt blir dette nye laget med vann om vi antar at isen er så kompakt at 1 liter is gir 1 liter vann?

16. En pendel med lengde l har periode $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ved små utslag, der $g \approx 9.8$ m/s^2. Pendelen i en gulvklokke ble under en hetebølge 1 % lenger enn normalt. Omtrent hvor mye sakket klokken per døgn som følge av temperaturendringen?

17. Tyngdens akselerasjon i høyden h km over havet er gitt ved

$$a = g\left(\frac{r}{r+h}\right)^2$$

der $r = 6370$ km og $g = 9.80$ m/s^2. Anslå ved lineær approksimasjon hvor mye a avtar dersom du flytter deg fra havnivå til toppen av Mount Everest som er ca. 8848 m høyt.

Anvendelser (Taylor polynom)

18. Bruk Taylorpolynomet til $f(x) = \sin x$ av grad 5 om $a = 0$ til å anslå verdien av $\sin\frac{1}{2}$, og undersøk nøyaktigheten i svaret ved å bruke

$$\text{i) } R_5\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{ii) } R_6\left(\frac{1}{2}\right).$$

Hvorfor bryter ikke resultatet med Taylors teorem som sier at

$$\sin\frac{1}{2} = P_5\left(\frac{1}{2}\right) + R_5\left(\frac{1}{2}\right) = P_6\left(\frac{1}{2}\right) + R_6\left(\frac{1}{2}\right) \ ?$$

19. Bruk et Taylor-polynom for $f(x) = e^x$ til å beregne e med feil mindre enn $1/10\,000$ i absoluttverdi. (Du kan anta som kjent at $e < 3$.)

20. Bruk Taylor-polynomet til $f(x) = \sqrt{x}$ av grad 2 om punktet 100 til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{101}$. Gi et overslag over nøyaktigheten.

21. Hvor godt er estimatet $\sin x \approx x - x^3/6$ for $|x| < \pi/6$? Bruk restleddet $R_4(x)$ (hvorfor ikke $R_3(x)$?) og sammenlign med lommeregnerens svar for utvalgte verdier av x.

22. For hvilke x er $\sin x \approx x - x^3/6$ med feil mindre enn 10^{-3} i absoluttverdi?

23. En gammel metode for å finne en tilnærmet verdi for kvadratroten til et tall b, er som følger. Finn det største hele tallet a slik at $a^2 < b$. Da er $a/2 + b/2a$ tilnærmet lik kvadratroten til b.

a) Benytt metoden når $b = 83$.

b) Forklar hva metoden har med Taylor-polynomer å gjøre.