Repetisjon av "gamalt stoff"
Løysingsforslag

1 Algebra og likningar

Oppgåve 1

a) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y \quad$ F

b) $\sin(x+y) = \sin x + \sin y \quad$ F

c) $k \cdot (x+y) = kx + ky \quad$ R

d) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad$ R

e) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad$ R

f) $\sqrt{x^2+y^2} = x + y \quad$ F

g) $(\sqrt[q]{a})^p = a^{p/q} \quad$ R

Oppgåve 2

a) $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = \underline{a^5}$

b) $a^3 + a^2$ – kan ikkje skrivast enklare.

c) $\frac{a^5 \cdot a^{-2}}{a^3} = a^{5+(-2)-3} = a^0 = \underline{1}$

d) $\frac{(x-2)(x+3)}{2(x+3)^2} = \underline{\frac{x-2}{2(x+3)}}$

e) $\ln(x^2-9) - \ln(x^2+6x+9) = \ln \frac{x^2-9}{x^2+6x+9} = \ln \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = \underline{\ln \frac{x-3}{x+3}}$

f) $\frac{x}{x+3}$ – kan ikkje skrivast enklare.

g) $(2x-1)^2 - 4x(x-1) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 - (4x^2 - 4x) =$
$4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 4x = \underline{1}$

Oppgåve 3

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(2x^2 & - & 3x & - & 3) & : & (x-2) & = & \underline{2x+1-\frac{1}{x-2}} \\
-(2x^2 & - & 4x) & & & & & & \\
-- & -- & -- & -- & -- & & & & \\
 & & x & - & 3 & & & & \\
 & - & (x & - & 2) & & & & \\
-- & -- & -- & -- & -- & & & & \\
 & & & - & 1 & & & &
\end{array}
$$

Oppgåve 4

Løys desse likningane:

a)

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 3x+2 \\ 2x-3x &= 2-3 \\ -x &= -1 \\ x &= \underline{1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2-3 &= 6 \\ x^2 &= 6+3=9 \\ x &= \pm\sqrt{9} = \underline{\pm 3} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{5-1}{2} = \underline{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{5+1}{2} = \underline{3}$$

d)

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad &\text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \\ x &= \underline{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \end{aligned}$$

der n er eit heiltal.

e)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5} &= 0.1 \\ \frac{t}{5}\ln\frac{1}{2} &= \ln\frac{1}{10} \\ \frac{t}{5} &= \frac{\ln\frac{1}{10}}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{\ln 10^{-1}}{\ln 2^{-1}} = \frac{-\ln 10}{-\ln 2} = \frac{\ln 10}{\ln 2} \\ t &= \underline{5\,\frac{\ln 10}{\ln 2}} \approx 16.6 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
x^4 &= 10 - 3x^2 \\
\left(x^2\right)^2 + 3x^2 - 10 &= 0 \\
x^2 &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}
\end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{-3+7}{2} = 2 \quad \text{eller} \quad x^2 = \frac{-3-7}{2} = -5$$

Sidan x^2 ikkje kan vere negativ, må vi ha at $x^2 = 2$ slik at $\underline{x = \pm\sqrt{2}}$.

Oppgåve 5

a)

$$\begin{aligned}
x - 7 &> 2x + 3 \\
x - 2x &> 3 + 7 \\
-x &> 10 \\
x &< -10
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 2x + 15}{x + 1} &\leq 5 \\
\frac{x^2 - 2x + 15}{x + 1} - 5 &\leq 0 \\
\frac{x^2 - 2x + 15 - 5(x + 1)}{x + 1} &\leq 0 \\
\frac{x^2 - 7x + 10}{x + 1} &\leq 0
\end{aligned}$$

Vi faktoriserar teljaren på venstre side ved å finne nullpunkta:

$$\begin{aligned}
x^2 - 7x + 10 &= 0 \\
x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \text{eller} \quad x = \frac{7+3}{2} = 5$$

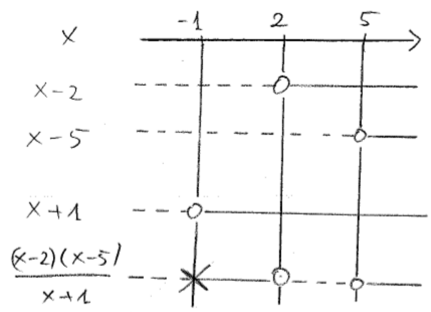
$$x^2 - 7x + 10 = 1(x - 2)(x - 5)$$

Ulikskapen kan altså skrivast

$$\frac{(x-2)(x-5)}{x+1} \leq 0 \ .$$

Vi brukar eit forteiknskjema for å undersøke når brøken på venstre side er mindre eller lik null. Sjå figur 1.

Løysinga blir $\underline{x < -1 \text{ eller } 2 \leq x \leq 5}$. Løysinga kan også formulerast ved hjelp av intervall: $\underline{x \in (-\infty, -1) \cup [2, 5]}$.



Figur 1: Forteiknsskjema for ulikskapen $\frac{(x-2)(x-5)}{x+1} \leq 0$.

2 Å formulere problem matematisk

Oppgåve 1

a) Vi lar t vere talet på år. Å redusere noko med 10 % er det same som å gange det med $1 - 0.10 = 0.90$. Om det har gått t år, skal vi gjere dette t gonger. Verdien V av bilen etter t år blir altså

$$\underline{V(t) = 350\,000 \text{ kr} \cdot 0.90^t} \ .$$

b) Ein generell sinus-funksjon kan sjå slik ut: $f(x) = a\sin(k(x-c)) + d$. Her er $|a|$ aplituden, $y = d$ er jamvektslinja og k er relatert til frekvensen f ved at $f = k/(2\pi)$. Her har vi at $d = 0$. Om vi vel a positiv, får vi $a = 325$ – målt i Volt. (Slik som oppgåva er formulert, kunne vi også ha vald $a = -325$). Sidan spenninga er 0 når tida $t = 0$, kan vi velge fasen c til å vere null. Med $f = 50 \text{ s}^{-1}$, får vi at spenninga U, målt i volt, etter t sekund blir

$$\underline{U(t) = 325\sin(100\pi\, t)} \ .$$

c) Her skal altså trykket T vere ein lineær funksjon av djupna d, $T(d) = ad+b$. Sidan trykket er éin atmosfære (atm) ved vassflata ($d = 0$), må b vere 1 atm. Vidare, når d aukar med 10 m, aukar T med 1 atm. Difor er $a = 1/10$ atm/m. Om vi lar T vere gitt i atmosfærar og d vere gitt i meter, får vi:

$$\underline{T(d) = \frac{1}{10}\,d + 1} \ .$$

Oppgåve 2

Vi går ut frå at andelen merka fisk i garnet er det same som andelen merka fisk i heile vatnet. Om vi lar talet på aurar totalt vere x, får vi altså at

$$\begin{aligned}\frac{200}{x} &= \frac{43}{153}\\ \frac{x}{200} &= \frac{153}{43}\\ x &= 200\cdot\frac{153}{43} \approx 711.6\end{aligned}$$

Altså er der ca. 700 aurar i vatnet.

Oppgåve 3

Vi kan finne volumet ved å konstatere at det består av ei halv kule med radius $r = 5/2$ m, ein sylinder med same radius i grunnflata og høgda $h_s = 7$ m og ei kjegle med same radius i grunnflata og med avstanden 5 m frå grunnflata til spissen. Ved kan finne høgda av kjegla ved å konstantere at radius, sidekant og høgde dannar ein rettvinkla trekant slik at vi kan bruke Pytagoras-setninga: $h_k = \sqrt{5^2 - 2.5^2}$ m. Volumet blir dermed

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h_s + \frac{1}{3}\pi r^2 h_k = \pi r^2\left(\frac{2}{3}r + h_2 + \frac{1}{3}h_k\right) =$$

$$\pi(2.5\,\mathrm{m})^2\left(\frac{2}{3}\cdot 2.5\,\mathrm{m} + 7\,\mathrm{m} + \frac{1}{3}\sqrt{5^2-2.5^2}\,\mathrm{m}\right) = 198.51\,\mathrm{m}^3 \approx \underline{199\,\mathrm{m}^3}\ .$$

Oppgåve 4

a) Sidan akselerasjonen er konstant, kan vi rekne endring i fart Δv som akselerasjon ganger tida, Δt. Vi veit også at farten er 0 i utgongspunktet. Dermed blir farten $\underline{v = 10\ \mathrm{m/s}^2\cdot 8\ \mathrm{s}}$. Meir genrelt, når akselerasjonen er konstant, er akselerasjonen den *deriverte* til farten, eller motsett: endring i fart er *integralet* av integrasjonen:

$$\underline{\Delta v = \int_{0\mathrm{s}}^{8\mathrm{s}} a(t)\,dt}\ .$$

b) For kvar tredje time blir kulturen dobla. For å finne ut kor stor kulturen er etter t timar, må vi altså gange 5 000 med 2 $t/3$ gonger; etter t timar er der altså
$5\,000\cdot 2^{t/3}$ individ. Likninga vi skal løyse blir

$$\underline{5\,000\cdot 2^{t/3} = 15\,0000}\ .$$

c) Informasjonen seier eigentleg ikkje noko om folketalet i seg sjølv, berre kor *fort* det endrar seg. Det er altså snakk om *den deriverte* av folketalet.

Denne deriverte har to bidrag, eit positivt og eit negativt. Om vi lar $F(t)$ vere folketalet etter t år, vil det positive bidraget vere $0.05\,F$, og det negative vil vere 15 000. Dermed får vi at

$$\underline{F'(t) = 0.05F(t) - 15\,000}\ .$$

Dette er ei *differensiallikning*. Løysinga av denne er funksjonen $F(t)$. Men for å få bestemt F eintydig, treng vi også eit *startkrav*; vi må vite $F(t)$ for eit eller anna tidspunkt t.

3 Derivasjon og integrasjon

Oppgåve 1

$$\begin{aligned}
a'(x) &= \underline{3x^2} \\
b'(x) &= \underline{\pi x^{\pi-1}} \\
c'(t) &= \cos t^2 \cdot (t^2)' = \underline{2t\cos t^2} \\
d'(x) &= \frac{(e^x)'\cos x - e^x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{e^x\cos x - e^x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \\
&\underline{\frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}} = e^x\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
e'(x) &= (\sqrt{x})'\sin^2 x + \sqrt{x}(\sin^2 x)' = (x^{1/2})'\sin^2 x + \sqrt{x}\,2\sin x\cdot(\sin x)' = \\
&\frac{1}{2}x^{1/2-1}\sin^2 x + 2\sqrt{x}\sin x\cos x = \underline{\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\sin x\cos x} = \\
&\frac{\sin^2 x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sin(2x) = \frac{\sin^2 x + 2x\sin(2x)}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Som vi ser, kan svaret ofte skrivast på fleire måtar. Kva som er enklast eller "penast" er ofte eit spørsmål om smak og behag.

Oppgåve 2

a) $\int x^3\,dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \underline{\frac{x^4}{4} + C}$

b) $\int \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}(-\cos(2x)) + C = \underline{-\frac{1}{2}\cos(2x) + C}$

c) $\int x\sin x^2\,dx$
Variabelbyte: $u = x^2$.
Det gir at $u'(x) = 2x$ slik at $dx = \frac{1}{2x}\,du$.
$\int x\sin x^2\,dx = \int x\sin u\frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int\sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C = \underline{-\frac{1}{2}\cos x^2 + C}$

d) $\int x\cos x\,dx$
Delvis integrasjon: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$.
$u = x$ gir $u' = 1$, $v = \sin x$ gir $v' = \cos x$:
$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C = \underline{x\sin x + \cos x + C}$

e) I oppgåve 3 i den fyrste delen av oppgåvesettet såg vi at integranden kan skrivast som $2x + 1 - \frac{1}{x-2}$.
$\int \frac{2x^2-3x-3}{x-2}\, dx = \int \left(2x + 1 - \frac{1}{x-2}\right)\, dx = \underline{x^2 + x - \ln|x-2| + C}$.