

Innlevering i	BYFE 1000
	Oppgavesett 4
Innleveringsfrist:	??? klokka 14:00
Antall oppgaver:	5, 20 deloppgaver

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) $\int_0^{\ln \pi} e^x \cos(2e^x) dx$

Variabelbytte: $u = 2e^x$, $\frac{du}{dx} = 2e^x$, $dx = \frac{1}{2e^x} du$.

Nye grenser: $u(0) = 2e^0 = 2$, $u(\ln \pi) = 2e^{\ln \pi} = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln \pi} e^x \cos(2e^x) dx &= \int_2^{2\pi} e^x \cos u \frac{1}{2e^x} du = \frac{1}{2} \int_2^{2\pi} \cos u du = \\ \frac{1}{2} [\sin u]_2^{2\pi} &= \frac{\sin(2\pi) - \sin 2}{2} = -\frac{\sin 2}{2} \end{aligned}$$

b) $\int_0^1 \sqrt{x} e^{2x^2} dx$

Denne integranden har ingen enkel antiderivert. Vi regner ut dette integralet ved å bruke trapesmetoden i stedet. Denne kan implementeres slik:

```
% Skript som implementerer trapesmetoden for
% numerisk integrasjon
% Integrasjonsgrensene er gitt i linje 10 og 1
% Inndeling av intervallet er gitt i linje 14 (bruker input-funksjonen)
% Integranden er gitt i ei funksjonfil som heter Integrand.m

% Grenser
a=0;
b=1;

% Inndeling
N=input('Hvor mange steg skal vi ha? ');
DeltaX=(b-a)/N;

% F{\o}rste og siste ledd
T=DeltaX/2*(Integrand(a)+Integrand(b));
```

```
% for-l{\o}kke over alle "indre" punkt
for i=1:(N-1)
    x=a+i*DeltaX;
    T=T+DeltaX*Integrand(x);
end
```

```
% Skriver integralet til skjerm
T
```

Her har vi brukt input-funksjonen for å kunne gi oppdelinga av intervallet det skal integreres over. Selve integranden er gitt i funksjonsfila `Integrand.m`:

```
function F=Integrand(x)

% Funksjon som skal integreres.
% Blir brukt av skriptet TrapesMet, som estimerer et integral ved
% trapesmetoden.

F=sqrt(x)*exp(2*x^2);
```

Vi kjører dette skriptet med ulike verdier for N . Vi får disse resultatene:

```
>> format compact
>> format long
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 10
T =
    1.902545767015153
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 50
T =
    1.882067114898277
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 100
T =
    1.881616147793307
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 200
T =
    1.881542729791085
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 500
T =
    1.881539446671374
```

Det ser ut til det siste svaret har mist tre rette desimaler.

Altså: $\int_0^1 x e^{2x^2} dx = \underline{1.882}$.

c) $\int_0^1 x^3 e^{2x^2} dx$

Vi innfører variabeltyttet $u = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = u/2$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^{2x^2} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} x^3 e^u \frac{1}{4x} du = \frac{1}{4} \int_0^2 x^2 e^u du = \\ \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{u}{2} e^u du &= \frac{1}{8} \int_0^2 u e^u du = \frac{1}{8} \left([u e^u]_0^2 - \int_0^2 e^u du \right) = \\ \frac{1}{8} (2e^2 - 0 - [e^u]_0^2) &= \frac{1}{8} (2e^2 - (e^2 - 1)) = \underline{\underline{\frac{e^2 + 1}{8}}} \end{aligned}$$

Her har vi brukt delvis integrasjon for å regne ut integralet $\int_0^2 u e^u du$.

d) For å regne ut dette integralet, bruker vi delvis integrasjon to ganger:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin x dx &= [x^2(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2x(-\cos x) dx = \\ &= -(\pi^2 \cos \pi - 0) + 2 \int_0^\pi x \cos x dx = \pi^2 + 2 \left([x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin x dx \right) = \\ \pi^2 + 2(\pi \sin \pi - 0 - [-\cos x]_0^\pi) &= \pi^2 + 2(0 + \cos \pi - \cos 0) = \underline{\underline{\pi^2 - 4}} \end{aligned}$$

e) $\int_0^2 x^2 \sin x^2 dx$

Akkurat som i deloppgave b), har vi her en integrand som ikke har noen elementær antiderivert. Vi bruker trapesmetoden igjen. Vi tar utgangspunkt i de samme m-filene som vi brukte i b). Vi endrer øvre integrasjonsgrense i skriptet **TrapesMet.m** til 2 (linje 11), og vi endrer linje 7 i funksjonsfila **Integrand.m** til

```
F=x^2*sin(x^2);
```

Vi kjører skriptet med stadig økende verdier for N:

```
>> format short
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 10
T =
    0.8386
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 50
T =
```

```
0.8826
>> TrapezMet
Hvor mange steg skal vi ha? 100
T =
0.8839
>> TrapezMet
Hvor mange steg skal vi ha? 500
T =
0.8844
>> TrapezMet
Hvor mange steg skal vi ha? 1000
T =
0.8844
```

$$\int_0^2 x^2 \sin x^2 dx = \underline{0.884}.$$

f) Dette integralet kan regnes ut ved å bruke delvis integrasjon;

$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$. Vi velger $u = \ln x$ og $v' = x^2$ slik at $u' = 1/x$ og $v = x^3/3$:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln x dx &= \left[\ln x \frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \\ \frac{8}{3} \ln 2 - 0 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} (2^3 - 1^3) = \underline{\underline{\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} 1 - iz &= z + \frac{i}{\sqrt{3}} \\ -iz - z &= \frac{i}{\sqrt{3}} - 1 \\ -(1+i)z &= -\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \\ z &= \frac{1 - \frac{i}{\sqrt{3}}}{1+i} = \frac{\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - \frac{i}{\sqrt{3}} - i + \frac{i^2}{\sqrt{3}}}{2} = \\ \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} - i \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}}} \approx 0.211 - 0.789i \end{aligned}$$

Dette ser svaret på kartesisk form, $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$. Vi kan finne tallet på polarform, $z = re^{i\theta}$, ved hjelp av formlene $r^2 = x^2 + y^2$ og $\tan \theta = y/x$. Men her blir det enklere om vi skriver opp igjen likinga over

med *koeffisientene* på polarform. Dette vil også gi oss eksakte svar i dette tilfellet. Vi har at $1+i = re^{i\theta}$ med $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ og $\tan \theta = 1$. Med $\theta \in [0, \pi/2]$ gir det at $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. På tilsvarende måte finner vi at $1-i/\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}$. Dermed kan likninga skrives som

$$\begin{aligned}(1+i)z &= 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2}e^{i\pi/4}z &= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6} \\ z &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}e^{i(-\pi/6-\pi/4)} = \\ &\quad \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i5\pi/12} \approx 0.817e^{-1.309i}}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}z^4 &= i = e^{i\pi/2} = e^{i(\pi/2+n\cdot 2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ z &= \left[e^{i(\pi/2+n\cdot 2\pi)} \right]^{1/4} = e^{i(\pi/2+n\cdot 2\pi)/4} = e^{i(\pi/8+n\cdot \pi/2)}\end{aligned}$$

Vi får fire løsninger – tilsvarende verdiene 0,1,2 og 3 for n :

$$\begin{aligned}z &= \underline{e^{i\pi/8}} \quad \text{eller} \quad z = e^{i(\pi/8+\pi/2)} = \underline{e^{i5\pi/8}} \quad \text{eller} \\ z &= e^{i(\pi/8+2\cdot \pi/2)} = \underline{e^{i9\pi/8}} \quad \text{eller} \quad z = e^{i(\pi/8+3\cdot \pi/2)} = \underline{e^{i13\pi/8}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

- a) $\frac{y'}{\sin x^2} = x\sqrt{y}, \quad y(\sqrt{\pi}) = 4$
Denne differensiallikninga er separabel:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{dy}{dx}}{\sin x^2} &= x\sqrt{y} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} &= x \sin x^2 \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int x \sin x^2 dx\end{aligned}$$

Vi innfører variabelbyttet $u = x^2$ for å finne det ubestemte integralet på høyre side:

$$\begin{aligned}\int y^{-1/2} dy &= \int x \sin u \frac{1}{2x} du \\ \frac{1}{-1/2+1} y^{-1/2+1} &= \frac{1}{2} \int \sin u du \\ 2y^{1/2} &= -\frac{1}{2} \cos u + C' = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C' \\ y &= \left(C - \frac{1}{4} \cos x^2 \right)^2 \quad (C = C'/2)\end{aligned}$$

C blir bestemt ved initialkravet:

$$\begin{aligned}y(\sqrt{\pi}) &= 4 \\ \left(C - \frac{1}{4} \cos \sqrt{\pi}^2 \right)^2 &= 4 \\ C - \frac{1}{4} \cdot (-1) &= \sqrt{4} \\ C &= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

Vi får svaret

$$y = \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cos x^2 \right)^2 = \frac{1}{16} (7 - \cos x^2)^2$$

b) $y' = \sin(x^2 + y^2)$, $y(0) = \sqrt{\pi}$

Denne differensiallikninga er hverken separabel eller lineær. Vi løser den numerisk ved å bruke Eulers metode. Den kan implementeres slik:

```
% Skript som implementerer Eulers metode
% Initialkravet, y(x0)=y0 blir ligg i linje 8 og 9.
% I linje 13 fikserer man maksimal verdi for x
% Antall steg fikseres i linje 16
% funksjonen F(x,y) fra differensiallikninga, y'=F(x,y) blir gitt
% i linje 28.

% Initialkrav
x0=0;
y0=sqrt(pi);

% Maksimal x-verdi
xMax=7;

% Antall steg og steglende
```

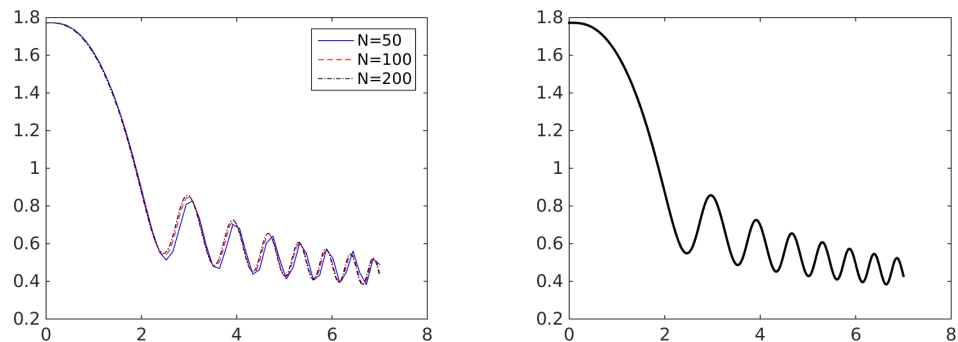
```
N=50;
h=(xMax-x0)/N;

% Initierer vektorer med x- og y-verdier
xVektor=x0:h:xMax;
yVektor=zeros(1,N+1);
yVektor(1)=y0;

% L\o ikke som implementerer Eulers metode
for i=1:N
    x=xVektor(i);
    y=yVektor(i);
    yD=sin(x^2+y^2);
    yVektor(i+1)=y+yD*h;
end

% Plotter resultatet
hold off
plot(xVektor,yVektor,'k-','linewidth',2)
set(gca,'fontsize',15)
```

Som vi kan se av linje 13 i skriptet, har vi latt x gå til 7. For å undersøke om N i linje 16 er satt for lavt, kjører vi skriptet flere ganger med stadig høyere N -verdier. For å plote de ulike grafene vi da får samtidig, setter vi `hold on` i linje 33. Videre kan det være en god idé å endre farge på grafen i linje 34 for å kunne se tydelig hvilken graf som tilsvare hva. Når vi gjør dette, kan resultatet se ut omtrent som plottet til venstre i figur 1.



Figur 1: Denne figuren viser løsninga på oppgave 2b). Plottet til venstre viser hvordan resultatet fra Eulers metode varierer med steglengda. Med 200 steg, eller flere, ser svaret ut til å være rimelig uavhengig av dette valget. Plottet til høyre er det samme som den sorte kurva i plottet til venstre.

c) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$

Denne førsteordens differensiallikninga er lineær. Vi kan løse den ved å gange begge sider av likninga med integrerende faktor. Vi identifiserer denne ved først å skrive likninga som $y' - y = x$. Den integrerende faktoren er $e^{F(x)}$ der vi skal ha at $F'(x) = -1$. Det er oppfylt for $F(x) = -x$.

$$\begin{aligned}e^{-x}(y' - y) &= e^{-x}x \\(e^{-x}y)' &= e^{-x}x \\e^{-x}y &= \int e^{-x}x \, dx\end{aligned}$$

Integralet kan regnes ut ved hjelp av delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}e^{-x}y &= \int e^{-x}x \, dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x} \cdot 1) \, dx = \\&= -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \\y &= e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + C) = -x - 1 + Ce^x\end{aligned}$$

Vi bestemmer C ved initialkravet:

$$\begin{aligned}y(0) &= 0 \\-0 - 1 - Ce^0 &= 0 \\C &= 1\end{aligned}$$

Løsninga er $y = -x - 1 + e^x$.

- d) Vi gjør dette like godt for begge de analytisk løsbare initialverdiproblemene. For initialverdiproblemet i a), lar vi x gå til 10. For å kunne implementere Eulers metode, skriver vi differensiallikninga på forma $y' = F(x, y)$:

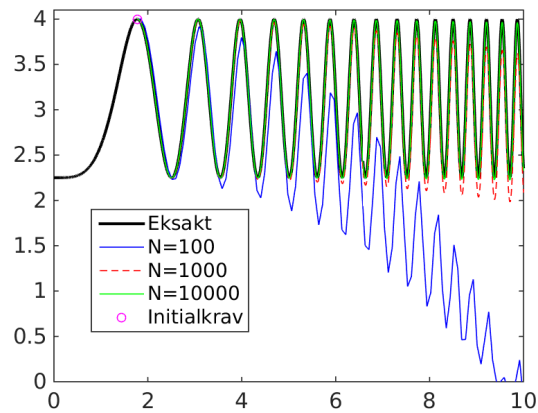
$$y' = x\sqrt{y} \sin x^2.$$

Denne funksjonen skriver vi inn i linje 28 i implementeringa vår av Eulers metode:

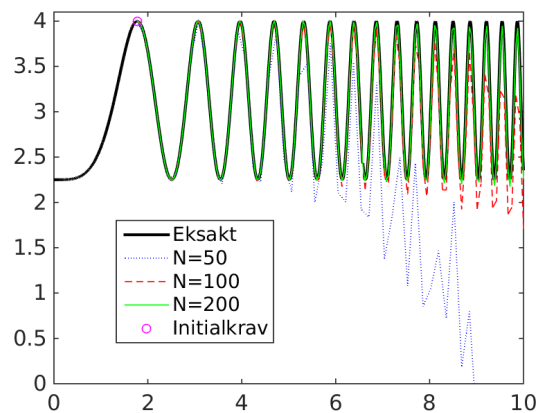
```
yD=x*sqrt(y)*sin(x^2);
```

Vi oppdaterer initialkravet i linje 9 og 10 og endrer maksimal x -verdi i linje 13 til 10. Vi kjører skriptet for ulike verier av N og plotter resultatene sammen med det eksakte svaret vi kom fram til i oppgave 2a). Resultatet er vist i figur 2. Vi ser at for dette initialverdiproblemet må vi bruke 10000 steg bare for å være i nærheten! Historia ville ha vore ei heilt anna om vi hadde brukt Eulers midtpunktm metode i stedet; se figur 3.

For det andre initialverdiproblemet vil nok 10 være en litt høy verdi for maksimal x . Vi setter denne til 3 denne gangen. Vi oppdaterer initialkravet i linje 9 og 10:



Figur 2: Figur som illustrerer hvordan Eulers metode gir ei løsning som, sakte, sakte, nærmer seg riktig løsning når vi øker antall steg (N).



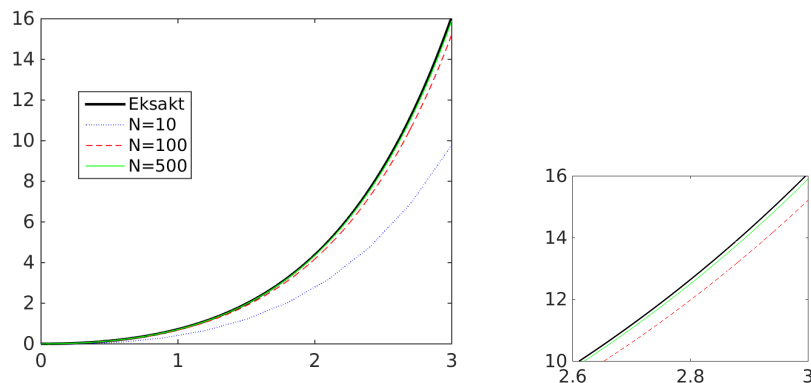
Figur 3: Figuren viser det samme som figur 2 – bortsett fra at vi her har brukt Eulers midpunktmetode. Merk at vi opererer med helt andre N -verdier enn i figur 2 her.

```
% Initialkrav
x0=0;
y0=0;
```

og selve differensailikninga i linje 29:

$$y' = x + y;$$

Vi gjentar samme prosedyre som over, og får resultatet vist i figur 4.



Figur 4: Denne figuren viser løsninga på oppgave 2c) – både den eksakte løsninga og numeriske estimat for ulike steglengder. I plottet til høyre har vi “zooma” inn på en liten del av plottet til venstre – for å kunne se forskjell på den numeriske og den eksakte løsninga.

Oppgave 4

“Gamle modeller”:

$$\begin{aligned} f(t) &= -16 \cos(55.9t) \\ g(t) &= -16e^{-2.93t} \cos(55.9t) \end{aligned}$$

Svingelikninga:

$$y'' + ky' + \omega^2 y = 0$$

- a) I oppgaveteksten står det at bjelken i utgangspunktet er bøyd 16 mm ned. Videre vet vi at bjelken er i ro i utgangspunktet. Med millimeter som enhet og positiv retning oppover skal vi altså ha at

$$\underline{y(0) = -16 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0} \quad .$$

- b) Uten demping:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad .$$

Vi løser denne ved å anta eksponentiell løsning: $y = e^{rt}$:

$$\begin{aligned} (e^{rt})'' + \omega^2 y &= 0 \\ e^{rt} (r^2 + \omega^2) &= 0 \\ r^2 &= -\omega^2 \\ r &= \pm \omega i \end{aligned}$$

Vi får rent imaginære løsninger av den karakteristiske likninga. Den generelle løsninga av differensallikninga blir da

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad .$$

Vi ser at dette faller sammen med $f(t)$ over dersom $A = 0$, $B = -16$ og, ikke minst, $\omega = 55.9$. Altså er $f(t)$ ei løsning for denne verdien av ω . Videre ser vi at $f(t)$ oppfyller initialkravene fra a):

$$f(0) = -16 \cos 0 = -16$$

$$f'(t) = -16(-\sin(55.9t)) \cdot 55.9$$

$$f'(0) = 16 \cdot 55.9 \sin 0 = 0$$

c) Vi løser svingelikninga, med $k \neq 0$, på samme måte som over:

$$(e^{rt})'' + k(e^{rt})' + \omega^2 y = 0$$

$$e^{rt}(r^2 + kr + \omega^2) = 0$$

$$r^2 + kr + \omega^2 = 0$$

$$r = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2}$$

Dersom $k^2 - 4\omega^2 \geq 0$, vil vi bare få reelle røtter for den karakteristiske likninga og ingen trigonometriske funksjoner i løsninga. Om derimot $k^2 - 4\omega^2 < 0$, blir r kompleks:

$$r = -\frac{k}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\omega^2 - k^2}}{2} = -\frac{k}{2} \pm i \sqrt{\omega^2 - k^2/4}$$

Dermed blir den generelle løsninga

$$y(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \left(A \sin \left(\sqrt{\omega^2 - k^2/4} t \right) + B \cos \left(\sqrt{\omega^2 - k^2/4} t \right) \right) \quad .$$

Kravet for å få løsninger av denne typen er altså at $k^2 - 4\omega^2 < 0$, eller ekvivalent:

$$\underline{k < 2\omega} \quad .$$

d) Vi kjenner igjen dempingsfaktoren i den generelle løsninga over: $e^{-\frac{k}{2}t}$. For at dette skal bli det samme som eksponentialfaktoren i $g(t)$ over, $e^{-2.93t}$, må vi kreve at $k/2 = 2.93$, eller at

$$k = 2 \cdot 2.93 = \underline{5.86} \quad .$$

Denne k -verdien er klart lavere enn $2\omega = 111.8$ (jmf. deloppgave c)).

e) Den generelle løsninga finner vi ved å sette inn verdiene for k og ω i uttrykket fra c):

$$\sqrt{\omega^2 - k^2/4} = \sqrt{55.9^2 - 5.86^2/4} = 55.82$$

$$y(t) = e^{-2.93t} (A \sin(55.82t) + B \cos(55.82t))$$

Det kan være fristende å sette $A = 0$ og $B = -16$ for å “oppfylle” initialkravene. Dette er nesten riktig, men ikke helt... Vi gjør det heller ordentlig:

$$\begin{aligned}y(0) &= -16 \\e^0 (A \sin 0 + B \cos 0) &= -16 \\B &= -16\end{aligned}$$

Vi deriverer $y(t)$:

$$\begin{aligned}y'(t) &= e^{-2.93t} (-2.93) (A \sin(55.82t) - 16 \cos(55.82t)) + \\&e^{-2.93t} (55.82A \cos(55.82t) + 16 \cdot 55.82 \sin(55.82t)) = \\&e^{-2.93t} [(-2.93A + 893.17) \sin(55.82t) + (55.82A + 46.88) \cos(55.82t)]\end{aligned}$$

Initialkravet på den deriverte:

$$\begin{aligned}y'(0) &= 0 \\e^0 [(-2.93A + 893.17) \sin 0 + (55.82A + 46.88) \cos 0] &= 0 \\55.82A + 46.88 &= 0 \\A &= -\frac{46.88}{55.82} = -0.8398\end{aligned}$$

Vi får altså denne løsningen:

$$y(t) = e^{-2.93t} (-0.8398 \sin(55.82t) - 16 \cos(55.82t)) .$$

Vi ser at den skiller seg fra $g(t)$: Den har både et sinus- og et cosinus-ledd. Det betyr at $g(t)$ og $y(t)$ er noe faseforskjøvet i forhold til hverandre – og at $g(t)$ ikke oppfyller initialkravet $y'(0) = 0$. Videre ser vi at vinkelfrekvensen, det tallet vi ganger t med i argumentet for de trigonometriske funksjonene, er noe justert; for $g(t)$ er den 55.9 og for $y(t)$ er den 55.82.

Begge disse forskjellene er ganske marginale; når vi plotter $g(t)$ og $y(t)$ sammen, er det vanskelig å se forskjell (for moderat t). Se figur 5.

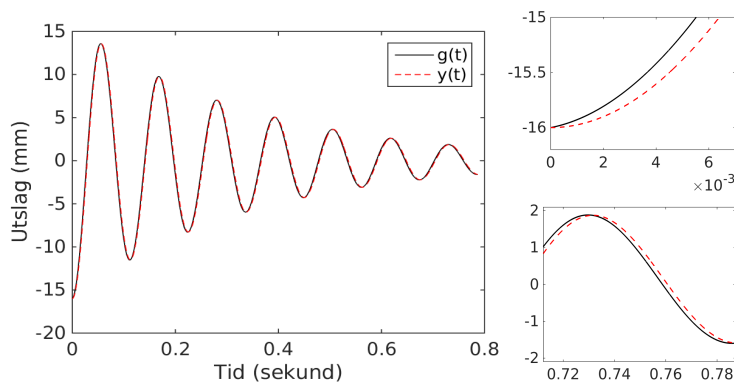
f)

$$y'' + ky' + \omega^2 y = \sin(ct)$$

Vi antar at vi kan finne en partikulær løsning på forma

$$\begin{aligned}y_p &= a \sin(ct) + b \cos(ct) \quad \text{slik at} \\y'_p &= ac \cos(ct) - bc \sin(ct) \quad \text{og} \\y''_p &= -ac^2 \sin(ct) - bc^2 \cos(ct)\end{aligned}$$

Vi minner om at den generelle løsningen vil være $y = y_h + y_p$ der y_h er den generelle løsningen av den tilsvarende homogene likningen – altså den vi fant i deloppgave c). Merk at faktoren $e^{-\frac{k}{2}t}$ i $y_h(t)$ gjør at y_h forsvinner når t blir stor. Altså vil vi ha at $y = y_p$ for store t ; y_p vil være den dominerende delen av løsningen.



Figur 5: Figuren viser modellene våre for dempa svinging. Den sorte grafen er modellen gitt ved funksjonen $g(t)$, mens den røde, stipla grafen er løsningen av svingelikninga, $y(t)$. For å se at det faktisk er forskjell på modellene, har vi “zooma” inn på to områder. Nær $t = 0$ (øverst til høyre) ser vi at bare $y(t)$ oppfyller initialkravet $y'(0) = 0$. For å se at frekvensene er noe ulike for $g(t)$ og $y(t)$, må vi gå til nokså høye t -verdier. Denne forskjellen er illustrert i plottet nederst til høyre.

Vi setter uttrykket vårt for y_p inn i differensiallikninga og bestemmer koerisientene a og b :

$$-ac^2 \sin(ct) - bc^2 \cos(ct) + k(ac \cos(ct) - bc \sin(ct)) + \omega^2(a \sin(ct) + b \cos(ct)) = ((\omega^2 - c^2)a - ck \cdot b) \sin(ct) + (ck \cdot a + (\omega^2 - c^2)b) \cos(ct) = \sin(ct)$$

Dette gir oss to likninger for a og b :

$$(\omega^2 - c^2)a - ck \cdot b = 1 \text{ og } ck \cdot a + (\omega^2 - c^2)b = 0.$$

Disse kan skrives som en matriselikning og løses ved å inverttere koeffisientmatrisa:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - c^2 & -ck \\ ck & \omega^2 - c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 - c^2 & -ck \\ ck & \omega^2 - c^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2} \begin{bmatrix} \omega^2 - c^2 & ck \\ -ck & \omega^2 - c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2} \begin{bmatrix} \omega^2 - c^2 \\ -ck \end{bmatrix}$$

Uttrykket for den partikulære løsninga vår, $y_p = a \sin(ct) + b \cos(ct)$, kan også skrives som en ren sinus- (eller cosinus-) funksjon;

$y_p = r \sin(ct + \phi)$. Amplituden r er da gitt som $\sqrt{a^2 + b^2}$. Altså vil amp-

lituden til den partikulære løsningen y_p være

$$r = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 - c^2}{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2}\right)^2 + \left(\frac{-ck}{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2}\right)^2} = \frac{1}{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2} \sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 + (ck)^2}}.$$

Vi plotter denne:

```
>> omega=55.9;
>> k=5.86;
>> c=0:1e-3:(3*omega);
>> r=1./sqrt((omega^2-c.^2).^2+(k*c).^2);
>> plot(c,r,'k','linewidth',2)
>> hold on
>> plot([1 1]*omega,[0 3.5e-3],'k--')
>> hold off
>> set(gca,'fontsize',15)
>> xlabel('c')
>> ylabel('Amplitude (mm)')
>> axis([0 150 0 3.5e-3])
```

Resultatet ser vi i figur 6. Av figuren ser vi at svingesystemet, altså bjelken, responderer på den ytre krafta på en helt annen måte når den ytre krafta har en frekvens som er mer eller mindre lik egenfrekvensen til bjelken; $c = \omega$. Dette fenomenet kalles resonans. Bredda på resonansen er bestemt av dempinga k . En høyere k -verdi gir en bredere resonans. Dersom k går mot null, vil resonansen bli smalere og smalere og høyere og høyere – uten noen øvre grense.

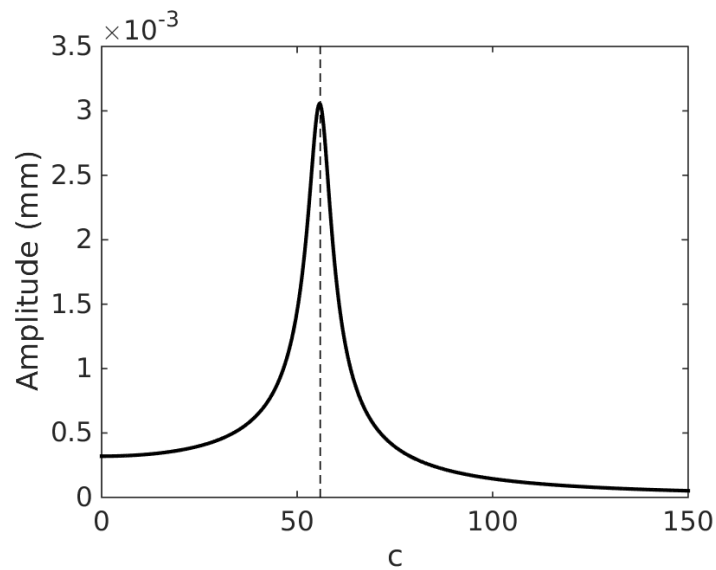
Oppgave 5

$$f(x) = 2 \sin x^2, \quad D_f = \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$$

a) Volumet er gitt ved formelen $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$. I vårt tilfelle får vi

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} (2 \sin x^2)^2 dx = 4\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin^2 x^2 dx.$$

Dette integralet er ikke spesielt greit å løse ved antiderivasjon. Vi bruke heller skriptet vårt for trapesmetoden. Vi oppdaterer integrasjonsgrensene i linje 10 og 11 og integranden i funksjonsfila `Integrand.m`. Linje 7 i funksjonfila setter vi til



Figur 6: Figuren viser amplituden til det svingende systemet som funksjon av frekvensen til den påtrykte svinginga. Den stipla linja tilsvarer systemets egenfrekvens.

```
F=(sin(x^2))^2;
```

Vi kjører skriptet og når vi synest vi har god nok presisjon, multipliserer vi med 4π for finne volumet:

```
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 10
T =
    0.3923
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 5
T =
    0.3925
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 10
T =
    0.3923
>> TrapesMet
Hvor mange steg skal vi ha? 50
T =
    0.3923
>> 4*pi*T
```

ans =
4.9298

Volumet er 4.930.

- b) Når vi roterer om y -aksen, bruker vi denne formelen for å finne volumet:
 $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$. I vårt tilfelle får vi

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin x^2 dx .$$

Denne løses greit ved variabelbyttet $u = x^2$:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi/2})} x \sin u \frac{1}{2x} du = \pi \int_0^{\pi/2} \sin u du = -\pi [\cos u]_0^{\pi/2} = \\ &= -\pi \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \pi . \end{aligned}$$