

Innlevering i

BYFE 1000

Oppgavesett 3

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$a'(x) = (x^{7.3})' \sin x + x^{7.3}(\sin x)' = \underline{7.3x^{6.3} \sin x + x^{7.3} \cos x}$$

b)

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{(x^2)' e^{\sqrt{x}} - x^2 (e^{\sqrt{x}})'}{(e^{\sqrt{x}})^2} = \frac{2xe^{\sqrt{x}} - x^2 e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})'}{e^{2\sqrt{x}}} = \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}} \left(2x - x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{e^{2\sqrt{x}}} = \underline{\underline{\frac{4x - x^{3/2}}{2e^{\sqrt{x}}}}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{1}{1 + x^2 + \cos(x^2)} (1 + x^2 + \cos(x^2))' = \\ &= \frac{0 + 2x + (-\sin x^2) (x^2)'}{1 + x^2 + \cos(x^2)} = \underline{\underline{\frac{2x(1 - \sin x^2)}{1 + x^2 + \cos(x^2)}}} \end{aligned}$$

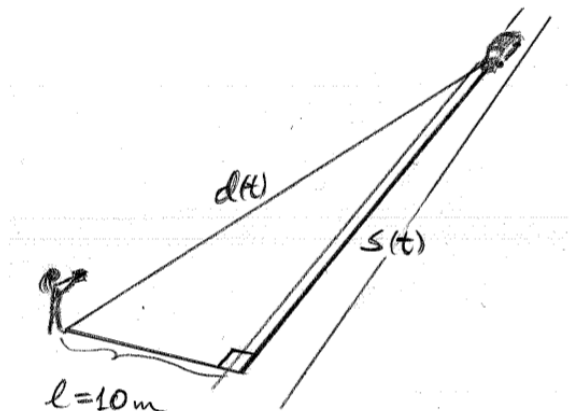
Oppgave 2

a) Se figur 1.

b) Pytagoras: $s^2 + l^2 = d^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{d^2 - l^2}$.

s og d er funksjoner av tida, $s(t)$ og $d(t)$. Vi har fått oppgitt at $d = 30$ m og at $d'(t) = -20.7$ m/s. Vi deriverer uttrykket over (implisitt) for å bestemme $s'(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((s(t))^2 + l^2) &= \frac{d}{dt} (d(t))^2 \\ 2ss'(t) + 0 &= 2dd'(t) \end{aligned}$$



Figur 1: Svaret på oppg. 2a).

Det gir at

$$s'(t) = \frac{dd'(t)}{s} = \frac{dd'}{\sqrt{d^2 - l^2}} = \frac{30 \text{ m} \cdot (-20.7) \text{ m/s}}{\sqrt{30^2 - 10^2} \text{ m}} =$$

$$-21.9557 \text{ m/s} = -21.9557 \cdot \frac{10^{-3} \text{ km}}{60^{-2} \text{ t}} = -79.04 \text{ km/t} .$$

Sjåføren bryter *ikke* fartsgernsa.

Det bør også nevnes at oppgava også kan løses bare ved hjelp av geometri – uten å derivere. Farten til bilen kan dekomponeres i en komponent med retning rett mot politikvinna og en komponent loddrett på denne. Vinkelen mellom fartsretninga og komponenten rett mot politikvinna er den samme som vinkelen mellom linjestykkene d og s over.

Oppgave 3

$$E_k(x) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right), \quad D_{E_k} = [0, 1],$$

a) Vi bestemmer Taylor-polynomet av 2. grad omkring $x = 0$ for $E_k(x)$ over:

$$\begin{aligned} E_k(0) &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} - 1 \right) = 0 \\ E'_k(x) &= mc^2 \left((1-x^2)^{-1/2} - 1 \right)' = mc^2 \left(-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} (1-x^2)' - 0 \right) = \\ &= mc^2 \left(-\frac{1}{2} \right) (1-x^2)^{-3/2} (-2x) = mc^2 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \\ E'_k(0) &= 0 \\ E''_k(x) &= mc^2 \frac{1 \cdot (1-x^2)^{3/2} - x \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)}{((1-x^2)^{3/2})^2} = \\ &= mc^2 \frac{(1-x^2)^{1/2} (1-x^2 + 3x^2)}{(1-x^2)^3} = mc^2 \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} \\ E''_k(0) &= mc^2 \end{aligned}$$

Dette gir at Taylor-polynomet blir

$$\begin{aligned} P_2(x) &= E_k(0) + E'_k(0) \cdot x + \frac{1}{2} E''_k(0) x^2 = 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} mc^2 x^2 = \\ &= \frac{1}{2} mc^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned}$$

Altså: $\frac{1}{2}mv^2$ er Taylor-polynomet av andre orden til $E_k(x)$ omkring $x = 0$. Derfor er E_k nær $\frac{1}{2}mv^2$ når x er nær 0 – altså når farten er mye lavere enn lysfarten, noe den vanligvis er.

Faktisk er $\frac{1}{2}mv^2$ også Taylor-polynomet av *trede* orden. Dette kan vi se direkte ut fra at $E_k(x)$ bare inneholder x^2 – altså ingen oddetallspotenser i x . Dermed vil Taylor-polynomet omkring $x = 0$ heller ikke inneholde noen ledd med oddetallspotenser. For å se eksplisitt at $P_2(x) = P_3(x)$, kan vi selvsagt også kontrollere at $E_k^{(3)}(0) = 0$.

Dermed har vi vist at

$$E_k(x) = P_3(x) + R_3(x) = \frac{1}{2}mv^2 + R_3(x)$$

hvor feilen $R_3(x)$ er gitt ved¹

$$R_3(x) = \frac{E_k^{(4)}(d)}{4!} x^4, \quad d \in [0, x].$$

¹Her har vi kalt argumentet til $E_k^{(4)}$ d for å unngå forvirring med lysfarten, som også vanligvis kalles c .

Siden E_k er en elementær funksjon definert på hele det aktuelle intervallet og d er avgrensa, er også $E_k^{(4)}(d)$ avgrensa. Om vi definerer K til å være $E_k^{(4)}(d)/4!$, har vi at $R_3(x) = Kx^4$. Når farten v er mye lavere enn lysfarten, er $x = v/c$ et tall nær null. x^4 er da et tall som ligger *enda* nærmere null, Kx^4 blir forsvinnende liten, og vi får at

$$E_k \approx P_3(x) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Vi kunne også ha løst oppgava på en noe enklere måte ved å innføre variabelbyttet $u = x^2$ og så lage Taylor-polynomet til funksjonen

$g(u) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1 \right)$. Med dette får vi at

$$g(0) = 0$$

$$g'(u) = mc^2 \left((1-u)^{-1/2} - 1 \right)' = -\frac{1}{2}mc^2(1-u)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{mc^2}{2}(1-u)^{-3/2}$$

$$g'(0) = \frac{1}{2}mc^2$$

slik at Taylor-polynomet for $g(u)$ av første orden omkring $u = 0$ blir

$$g(0) + g'(0)u = 0 + \frac{1}{2}mc^2u = \frac{1}{2}mc^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Feilen vil nå være gitt ved

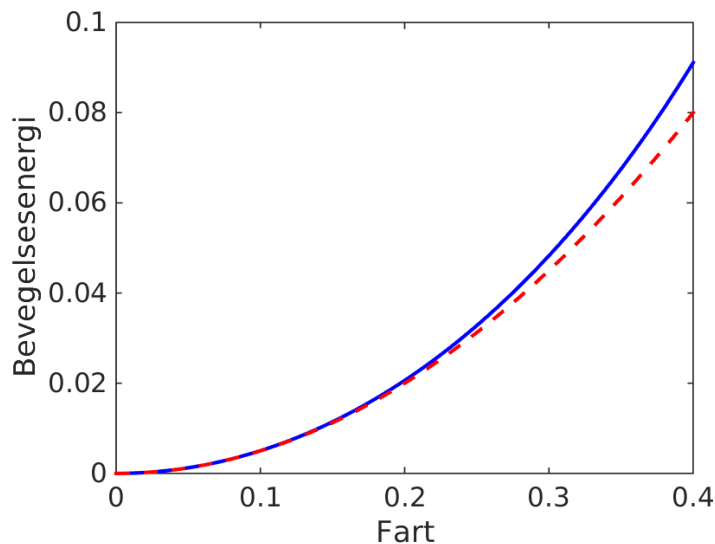
$$\frac{g''(d)}{2!}u^2 = \frac{g''(d)}{2}x^4, \quad d \in [0, u] \quad .$$

Siden $g''(d)$ vil være avgrensa, kan vi også ut fra dette konkludere med at avviket mellom E_k og $\frac{1}{2}mv^2$ vil gå som Kx^4 .

b) Om vi gjør disse kommandoene i MATLAB, får vi opp plottet vist i figur 2:

```
>> x=0:1e-3:0.4;
>> Ek1=(1./sqrt(1-x.^2)-1);
>> Ek2=0.5*x.^2;
>> plot(x,Ek1,'b-', 'linewidth',2)
>> hold on
>> plot(x,Ek2,'r--', 'linewidth',2)
>> set(gca,'fontsize',15)
>> xlabel('Fart')
>> ylabel('Bevegelsesenergi')
>> hold off
```

Føst når farten blir nærmere 20% av lysfarten, ser vi forskjell på de to grafene.



Figur 2: Kinetisk energi som funksjon av fart – både relativistisk (blå graf) og ikke-relativistisk (rød, stipla graf).

- c) Vi finner den verdien av x som gjør at $|E_k(x) - \frac{1}{2}mc^2x^2|$ blir like stor som 10 % av E_k :

$$\begin{aligned} \left| E_k(x) - \frac{1}{2}mc^2x^2 \right| &= E_k/10 \Leftrightarrow \\ 0.9mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) - 0.5mc^2x^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ 9 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) - 5x^2 &= 0 \end{aligned}$$

(E_k er konsekvent større enn $mv^2/2$; derfor kan vi droppe absoluttverdi-tegnet.)

Newtons metode går ut på å iterere på uttrykket

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

hvor $f(x) = 9 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) - 5x^2$ i vårt tilfelle. Vi trenger også den derivate:

$$f'(x) = \left(9 \left((1-x^2)^{-1/2} - 1 \right) - 5x^2 \right)' = \frac{9x}{(1-x^2)^{3/2}} - 10x.$$

Ei implementering av Newtons metode for dette problemet kan se slik ut:

```

1 % Skript som implementerer Newtons metode for å løse
2 % likninga  $f(x)=0$ .
3 % Funksjonen  $f(x)$  blir gitt i linje 19 og den deriverte,  $f'(x)$ ,
4 % blir gitt i linje 20.
5 % Man må også skrive inn en passe  $x_0$  i linje 8.
6
7 % Bestemmer  $x_0$ 
8  $x_0=0.3$ ;
9
10 % Tilordner en tilfeldig verdi til  $x_{Gm}$ 
11  $x_{Gm}=100$ ;
12  $x=x_0$ ;
13
14 % Bestemmer presisjonen
15  $Pres=1e-5$ ;
16
17 while  $abs(x-x_{Gm}) > Pres$ 
18      $x_{Gm}=x$ ;
19      $funk=9*(1/sqrt(1-x^2))-5*x^2$ ;
20      $funkDeriv=9*x/(1-x^2)^{(3/2)}-10*x$ ;
21      $x=x-funk/funkDeriv$ ;
22 end
23
24 % Skriver løsninga til skjerm
25  $x$ 

```

Som vi ser av linje 8, har vi valgt $x_0 = 0.3$. Vi kjører dette skriptet, som vi har kalt `NewtonMet.m`:

```

>> format compact
>> NewtonMet
x =
    0.3630

```

Feilen blir altså større enn 10 % i det farten passerer 36.3 % av lysfarten (ca. 392 millioner km/t). Merk at om vi hadde valgt en x_0 -verdi som var for lav, ville vi ha funnet den mindre interessante løsninga $x = 0$.

d) Vi fortsetter med likninga fra c):

$$\begin{aligned}9\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)-5x^2 &= 0 \\ \frac{9}{\sqrt{1-x^2}}-1 &= 5x^2+9 \\ \frac{9^2}{1-x^2} &= (5x^2+9)^2 = 25x^4+90x^2+81 \\ 81 &= (25x^4+90x^2+81)(1-x^2) \\ 81 &= 25x^4+90x^2+81-25x^6-90x^4-81x^2 \\ -25x^6-65x^4+9x^2 &= 0 \\ -x^2(25x^4+65x^2-9) &= 0\end{aligned}$$

Her ser vi at $x=0$ er ei løsning. Men det er ikke denne vi er interesserte i. Vi vil finne nullpunktene til det som står inni parantesen. Dette gir ei andregradslikning i x^2 :

$$\begin{aligned}25(x^2)^2+65x^2-9 &= 0 \\ x^2 &= \frac{-65 \pm \sqrt{65^2-4 \cdot 25 \cdot (-9)}}{2 \cdot 25} \\ x^2 &= \frac{\sqrt{65^2+900}-65}{50} = \frac{\sqrt{205}-13}{10} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{205}-13}{10}} \approx \underline{\underline{\pm 0.36302}}\end{aligned}$$

Vi ser at (det positive) svaret stemmer med det vi fant i c) – i alle fall med fire desimaler.

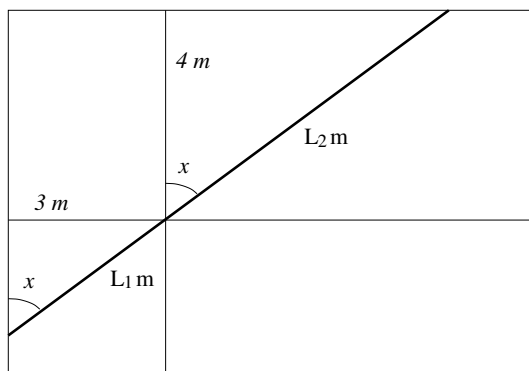
Oppgave 4

a) Vi kan tenke oss at vi deler lengda L opp i to deler som vist i figur 3: $L = L_1 + L_2$. Videre kan vi se av figuren at

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{3}{L_1} \quad \text{og} \\ \cos x &= \frac{4}{L_2}\end{aligned}$$

slik at $L_1 = 3/\sin x$ og $L_2 = 4/\cos x$. Dermed får vi at

$$L(x) = \frac{3}{\sin x} + \frac{4}{\cos x} \quad .$$



Figur 3: Skisse av hjørnet på en korridor.

- b) For å svare på spørsmålet, må vi minimere L . Siden $L \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow 0^+$ og når $x \rightarrow (\pi/2)^-$, må minimalpunktet være et punkt der den deriverte er null:

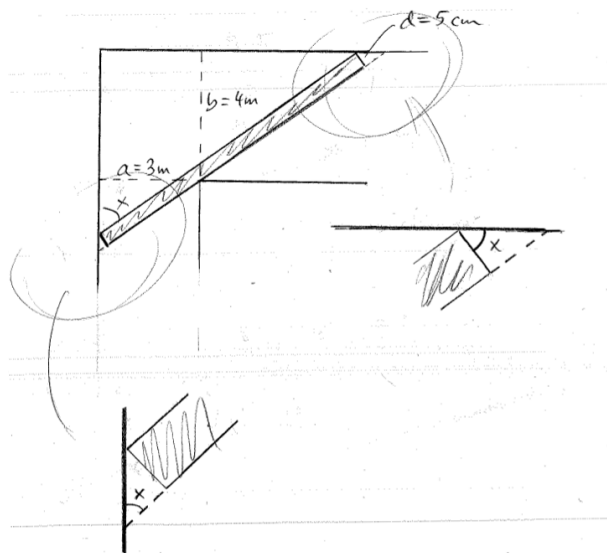
$$\begin{aligned}
 L'(x) &= 0 \\
 (3(\sin x)^{-1} + 4(\cos x)^{-1})' &= 0 \\
 -3(\sin x)^{-2} \cos x - 4(\cos x)^{-2}(-\sin x) &= 0 \\
 \frac{4 \sin x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cos x}{\sin^2 x} &= 0 \\
 \left(\frac{4 \sin x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cos x}{\sin^2 x} \right) \cos^2 x \sin^2 x &= 0 \cdot \cos^2 x \sin^2 x \\
 4 \sin^3 x - 3 \cos^3 x &= 0 \\
 4 \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^3 - 3 &= 0 \\
 4 \tan^3 x &= 3 \\
 \tan x &= \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \\
 x &= \arctan \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \approx 0.7375
 \end{aligned}$$

Vi setter denne x -verdien inn i uttrykket for $L(x)$:

$$L\left(\arctan \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right) \approx \frac{3}{\sin 0.7375} + \frac{4}{\cos 0.7375} \approx 9.8657$$

Den lengste bjelken vi får gjennom hjørnet er altså 9.865 m.

²Her har vi valgt å runde av nedover, selv om det strengt tatt er feil matematisk. Grunnen til det blir nok åpenbar om man tenker seg om litt...



Figur 4: Figur som illustrerer situasjonen i oppgave 4 c). En bjelke med tykkelse 5 cm skal bæres gjennom et hjørne i en korridor.

- c) Når vi skal ta tykkelsen med i betraktninga, blir jo bjelken vi får gjennom noe kortere. I figur 4 ser vi at vi må trekke fra litt i hver ende i forhold til det vi gjorde over. Som figuren viser, er den stipla lengda nede til venstre lik $d/\tan x$ og den oppe til høyre er $d \tan x$. Vi trekker dette fra funksjonen vi hadde i b) og definerer en ny funksjon $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{a}{\sin x} - \frac{d}{\tan x} + \frac{b}{\cos x} - d \tan x = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} - d \left(\frac{1}{\tan x} + \tan x \right),$$

der $a = 3$, $b = 4$ og $d = 0.05$. Det siste leddet kan skrives noe mer kompakt:

$$\frac{1}{\tan x} + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

Dette er den funksjonen vi nå skal minimere. Som før er L_2 minimal når

$$L_2'(x) = 0:$$

$$\begin{aligned} L_2'(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} - \frac{d}{\cos x \sin x} \right) &= 0 \\ -\frac{a \cos x}{\sin^2 x} + \left(-\frac{b(-\sin x)}{\cos^2 x} \right) - d \left(-\frac{1}{(\cos x \sin x)^2} \right) (\cos x \sin x)' &= 0 \\ \frac{b \sin x}{\cos^2 x} - \frac{a \cos x}{\sin^2 x} + \frac{d(-\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\cos^2 x \sin^2 x)} &= 0 \\ \frac{b \sin^3 x - a \cos^3 x - \frac{d}{2} \cos(2x)}{\cos^2 x \sin^2 x} &= 0 \\ b \sin^3 x - a \cos^3 x - \frac{d}{2} \cos(2x) &= 0 \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\cos(2x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$. Likninga kan vi løse ved å bruke Newtons metode. Til det trenger vi den deriverte av uttrykket:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(b \sin^3 x - a \cos^3 x - \frac{d}{2} \cos(2x) \right) &= \\ 3b \sin^2 x \cos x + 3a \cos^2 x (-\sin x) - \frac{d}{2} (-\sin(2x)) \cdot 2 &= \\ 3b \sin^2 x \cos x - 3a \cos^2 x \sin x + d \sin(2x) & \end{aligned}$$

Vi tar utgangspunkt i det samme skriptet som vi brukte i oppgave 3 c) og endrer `x0` til, for eksempel, $\pi/4$ i linje 8. Videre oppdaterer vi funksjonen og dens deriverte i linje 19 og 20:

```
funk=4*(sin(x))^3-3*(cos(x))^3-0.05/2*cos(2*x);  
funkDeriv=3*4*(sin(x))^2*cos(x)+3*3*(cos(x))^2*sin(x)+0.05*sin(2*x);
```

Når vi kjører skriptet, finner vi – kanskje ikke så overraskende – at den vinkelen x som gir minimal L_2 , ligger veldig nær det vi fant i b):

```
>> NewtonMet  
x =  
    0.7378
```

Men de er ikke like, og forskjellen villa ha vært større med en tykkere bjelke. Minimal L_2 blir:

```
>> L2=3/sin(x)+4/cos(x)-.05*(1/tan(x)+tan(x))  
L2 =  
    9.7652
```

Den lengste bjelken vi får gjennom hjørnet er 9.765 m.

Oppgave 5

- a) Både teller og nevner går mot 0 når x går mot 0. Vi bruker L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

- b) Også her kan vi bruke L'Hôpitals regel om vi skriver om uttrykket litt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = \underline{0}$$

Oppgave 6

$$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}, \quad D_f = [1, 3]$$

- a) f er ein elementær funksjon definert på et lukka, avgrensa intervall. Derfor har den både minimal- og maksimalpunkt(er) ved ekstremalverdisetninga (s. 170 i læreboka).
- b) Vi deriverer:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln x)'e^x - \ln x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)}{e^{2x}} = \\ e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) &= \frac{1}{xe^x} (1 - x \ln x) \end{aligned}$$

Faktoren $\frac{1}{xe^x}$ er alltid positiv i D_f . Derfor er $f'(x) = 0$ ekvivalent med at

$$1 - x \ln x = 0$$

Om vi kaller venstre side i likninga over for $g(x)$, ser vi at $g(0) = 1 > 0$ og at $g(3) = 1 - 3 \ln 3 \approx -2.296 < 0$. Siden g er kontinuerlig på intervallet $[1, 3]$, må g ha minst ett nullpunkt på intervallet ved skjæringssetninga. Videre er g avtagende på hele intervallet. Det kan vi se av at både x og $\ln x$ er økende. Eller man kan se det ved å derivere $g(x)$:

$$g'(x) = 0 - \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = -\ln x - 1 < 0 \quad .$$

Siden g er strengt avtagende, kan ikke funksjonen ha flere enn ett nullpunkt på intervallet.

Altså har likninga $1 - x \ln x = 0$ ett – og bare ett – nullpunkt på $[1, 3]$.

- a) Kandidater til globale ekstermalpunkt er randpunkt og punkt der den deriverte er null.

Randpunkt:

$$f(1) = \frac{\ln 1}{e^1} = 0$$

$$f(3) = \frac{\ln 3}{e^3} \approx 0.0547$$

For å finne den x -verdien som gir at $f'(x) = 0$, må vi løse likninga fra b). Dette gjør vi ved å bruke Newtons metode. Vi tar utgangspunkt i det samme skriptet som vi brukte i oppgave 3 c) og 4 c). Vi endrer x_0 i linje 8 til, for eksempel, 2. Videre oppdaterer vi funksjonen vi skal finne nullpunktet til i linje 19 og 20:

```
funk=1-x*log(x);
funkDeriv=-log(x)-1;
```

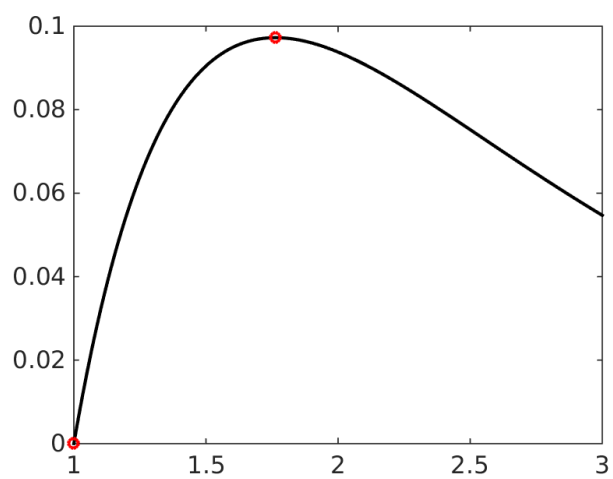
Vi kjører skriptet og bruker svaret til å finne $f(x)$ for den aktuelle x -verdien:

```
>> NewtonMet
x =
    1.7632
>> log(x)/exp(x)
ans =
    0.0973
```

Av dette ser vi at det globale minimalpunktet er (1,0) og at det globale maksimalpunktet er (1.7632,0.0973).

Som kontroll kan vi plotte $f(x)$ sammen med disse punktene (se figur 5):

```
>> x=1:1e-2:3;
>> f=log(x)./exp(x);
>> plot(x,f,'k-','linewidth',2)
>> hold on
>> plot(1,0,'ro','linewidth',2)
>> plot(1.763,.0973,'ro','linewidth',2)
>> hold off
>> set(gca,'fontsize',15)
```



Figur 5: Plott av funksjonen i oppgave 6 – sammen med de globale ekstremalpunktene vi fant i oppgave 6c).