

Innlevering i BYFE 1000
 Oppgavesett 2
 Innleveringsfrist: 14. november klokka 14:00
 Antall oppgaver: 6, 18 deloppgaver

Løsningsforslag

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

a)

$$2B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 14 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 5 \\ 8 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 10 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 18 & 53 \\ 24 & 8 & 22 \\ 93 & 26 & 79 \end{bmatrix}$$

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 7 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 2 & 5 \\ 4 & 15 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Siden A og B har ulike format, er ikke $2A - 3B$ definert, og siden A har 2 søyler og B har 3 rekker, er heller ikke produktet AB definert.

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = \underline{1}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 4) = \underline{2}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

Matrisa D er ikke kvadratisk. Derfor har den heller ikke noen determinant.

c) For å finne A^{-1} bruker vi formelen for inversen til ei 2×2 -matrise:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Vi finner B^{-1} ved å rekkeredusere matrisa $[B|I_3]$ til redusert trappeform:

$$\begin{aligned} [B|I_3] &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Altså:

$$B^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 & 5 & 2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}}}.$$

Siden $\det C = 0$, har ikke C noen invers. D er ikke kvadratisk og har derfor heller ingen invers.

d)

$$(D - 3X)A = D$$

$$DA - 3XA = D$$

$$-3XA = D - DA$$

$$XA = -\frac{1}{3}(D - DA)$$

$$XA \cdot A^{-1} = -\frac{1}{3}(D - DA) \cdot A^{-1}$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 2 & 5 \\ 4 & 15 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & -21 \\ 1 & -6 \\ -3 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 10 & -9 \\ 0 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{10}{3} & 3 \\ 0 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Her har vi satt inn svaret fra a) for DA og svaret fra b) for A^{-1} .

- e) Vi ber MATLAB utføre de samme beregningene – i den samme rekkefølgen som vi gjorde dem:

```
>> format compact
>> A=[1 3; 1 4];
>> B=[2 6 7; 1 2 3; 3 10 10];
>> C=[1 2 3; 4 0 2; 5 2 5];
>> D=[0 7; 3 -1; 1 3; 2 -2];
>> 2*B
ans =
     4     12     14
     2      4      6
     6     20     20
>> B+C
ans =
     3      8     10
     5      2      5
     8     12     15
>> 2*A-3*B
Error using -
Matrix dimensions must agree.
```

```
>> A*B
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.
>> B*C
ans =
    61    18    53
    24     8    22
    93    26    79
>> D*A
ans =
     7    28
     2     5
     4    15
     0    -2
>> det(A)
ans =
     1
>> det(B)

ans =

    2.0000

>> det(C)

ans =

     0

>> det(D)
Error using det
Matrix must be square.

>> inv(A)

ans =

     4    -3
    -1     1
```

```
>> inv(B)

ans =

    -5.0000    5.0000    2.0000
    -0.5000   -0.5000    0.5000
     2.0000   -1.0000   -1.0000

>> inv(C)
Warning: Matrix is singular to working precision.

ans =

    Inf    Inf    Inf
    Inf    Inf    Inf
    Inf    Inf    Inf

>> inv(D)
Error using inv
Matrix must be square.
```

Vi ser at vi får feilmeldinger/advarsler når vi forsøker å regne ut noe som ikke er definert.

Til slutt regner vi ut både høyre og venstre side i likninga i d) med den X -matrisa vi kom fram til:

```
>> X=[7/3 0; -10/3 3; 0 1; -8/3 2];
>> (D-3*X)*A
```

```
ans =

     0     7
     3    -1
     1     3
     2    -2
```

```
>> D
```

```
D =

     0     7
     3    -1
     1     3
     2    -2
```

Vi ser at høyre og venstre side er like.

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< x + 2 \\ 2x - x &< 2 + 3 \\ x &< 5 \end{aligned}$$

Altså: $x \in \langle -\infty, 5 \rangle$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{-x+7}{x^2-9} &\leq -1 \\ \frac{-x+7}{x^2-9} + 1 &\leq 0 \\ \frac{-x+7+(x^2-9)}{x^2-9} &\leq 0 \\ \frac{x^2-x-2}{x^2-9} &\leq 0 \end{aligned}$$

Vi faktorerer uttrykket. Telleren kan faktorerises ved å finne nullpunktene:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{1+3}{2} = 2 \end{aligned}$$

Dermed har vi at $x^2 - x - 2 = 1 \cdot (x - (-1))(x - 2) = (x + 1)(x - 2)$.

Nevneren kan vi faktorisere ved hjelp av konjugatsetninga:

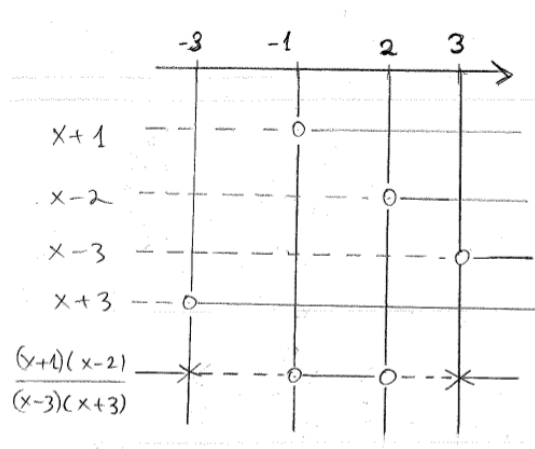
$$x - 9 = x - 3^2 = (x - 3)(x + 3).$$

Ulikheten vår kan altså skrives

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Vi setter opp et fortegnsskjema for å løse denne. Dette er vist i figur 1.

Av dette ser vi at $x \in \langle -3, -1 \rangle \cup [2, 3 \rangle$.



Figur 1: Forteiknsskjema for oppgave 2 b).

Oppgave 3

- a) Midpunktformelen for numerisk derivasjon:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Vi lar t vere tida som har gått sidan klokka 9:00, $S(t)$ er strømmen og $V(t)$ er totalt volum som har passert ved tida t . Her bruker vi $h = 2$ min og får at strømmen blir

$$\begin{aligned} S(30 \text{ min}) &= V'(30 \text{ min}) \approx \frac{V(32 \text{ min}) - V(28 \text{ min})}{2 \cdot 2 \text{ min}} = \frac{9.31 \text{ m}^3 - 8.50 \text{ m}^3}{4 \text{ min}} = \\ &0.2025 \frac{10^3 \text{ l}}{60 \text{ s}} = 3.375 \text{ l/s} \approx \underline{3.38 \text{ l/s}} \end{aligned}$$

- b) Her skal vi gjenta det vi nettopp gjorde – bortsett fra at vi nå skal finne strømmen ved *alle* tidspunktene i tabellen. Til dette bruker vi midtpunktformelen igjen. Men i endepunktene, for klokka 9:00 og 10:00, kan vi ikke bruke denne siden vi ikke vet volumet klokka 8:58 og 10:02. Derfor bruker vi de “ensidige” formlene

$$\begin{aligned} f'(a) &\approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{og} \\ f'(a) &\approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \end{aligned}$$

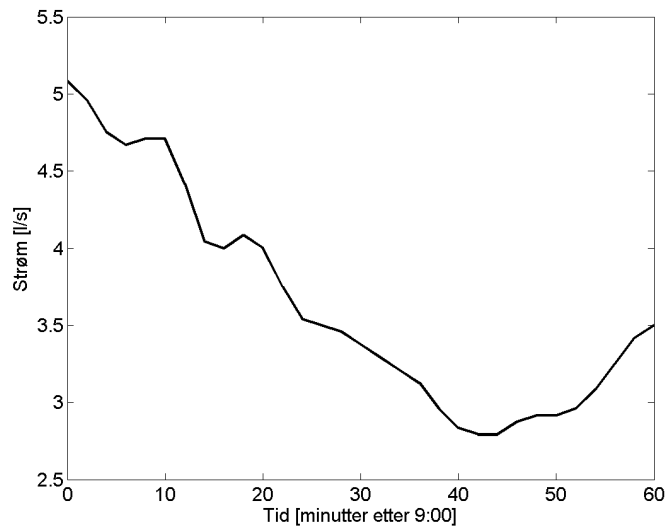
her.

Skriptet som implementerer dette, kan se slik ut:

```
1 % Skript som regner ut strøm på ulike tidspunkt ut fra en volum-tabell
2
3 % Tabellen:
4 Tabell=[0      1.3700
5          2.0000   1.9800
6          4.0000   2.5600
7          6.0000   3.1200
8          8.0000   3.6800
9         10.0000   4.2500
10        12.0000   4.8100
11        14.0000   5.3100
12        16.0000   5.7800
13        18.0000   6.2700
14        20.0000   6.7600
15        22.0000   7.2300
16        24.0000   7.6600
17        26.0000   8.0800
18        28.0000   8.5000
19        30.0000   8.9100
20        32.0000   9.3100
21        34.0000   9.7000
22        36.0000  10.0800
23        38.0000  10.4500
24        40.0000  10.7900
25        42.0000  11.1300
26        44.0000  11.4600
27        46.0000  11.8000
28        48.0000  12.1500
29        50.0000  12.5000
30        52.0000  12.8500
31        54.0000  13.2100
32        56.0000  13.5900
33        58.0000  13.9900
34        60.0000  14.4100
35 ];
36
37 % Leser inn tider og volum fra tabellen:
38 Tider=Tabell(:,1);
39 Volum=Tabell(:,2);
40
41 % Steglengde
42 h=Tider(2)-Tider(1);
43 % Bestemmer antall punkt
44 N=length(Tider);
45
46 % Deriverte i endene
```

```
47 Stroem(1)=(Volum(2)-Volum(1))/h;
48 Stroem(N)=(Volum(N)-Volum(N-1))/h;
49
50 % for-løkke som går over alle "indre" punkt
51 for i=2:(N-1)
52     Stroem(i)=(Volum(i+1)-Volum(i-1))/(2*h); % Midtpunktformel
53 end
54
55 % Regner om fra m^3/min til l/s:
56 Stroem=Stroem*1e3/60;
57
58 % Lager plott:
59 plot(Tider,Stroem,'k-','linewidth',2)
60 set(gca,'fontsize',15)
61 xlabel('Tid [minutter etter 9:00]')
62 ylabel('Strøm [l/s]')
```

Her har vi brukt de første linjene til å kopiere tallene direkte inn i skriptet¹. Etter å ha estimert alle de deriverte, blir dette plotta. Dette plottet er vist i figur 2.



Figur 2: Dette plottet viser strømmen ut fra et vannbasseng som funksjon av tida.

¹Dette kunne ha blitt gjort mer elegant ved hjelp av `load`-funksjonen i MATLAB.

Oppgave 4

- a) Her er funksjonen kontinuerlig for $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3-x}{4-2x} = \frac{3-5}{4-2 \cdot 5} = \frac{1}{3} \quad .$$

- b) Her går både teller og nevner mot null. Derfor vil $x - 2$ være faktor både i teller og nevner. Vi faktorerer nevneren ved hjelp av konjugatsetninga:

$$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) = -(x - 2)(x + 2) \quad .$$

Telleren kan faktorerisere ved å polynom-dividere den med $x - 2$ eller ved å finne nullpunktene. Vi gjør det siste her:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \\ x &= \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{eller} \quad x = \frac{-1+5}{2} = 2 \end{aligned}$$

Dermed kan telleren faktorerisere slik: $2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x + 3)(x - 2)}{-(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x + 3)}{-(x + 2)} = -2 \cdot \frac{2 + 3}{2 + 2} = -\frac{5}{2}$$

- c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x + \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{x})}{x^2 - \sqrt{x}^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{x})}{x(x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x + \sqrt{x})}{x} = \frac{(1 + 1)(1 + \sqrt{1})}{1} = 4 \end{aligned}$$

Vi kunne også ha løst oppgava ved å faktorisere i faktorer med $\sqrt{x}$ direkte – uten å utvide brøken først:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}^2 - 1)(x + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{1} + 1) \cdot (1 + 1)}{\sqrt{1}} = 4 \end{aligned}$$

- d) Her innfører vi variabelbyttet $t = 2/x$. Når x går mot ∞ , vil t gå mot null fra oversida.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\frac{1}{2} \cdot t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2 \quad .$$

Her har vi brukt at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Oppgave 5

Vi veit at for to matriser gjelder $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Videre har vi for invertible matriser at $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Dette bruker vi i det følgende:

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \Rightarrow \\ \det A &= \det(PDP^{-1}) = \det P \cdot \det(DP^{-1}) = \det P \cdot \det D \cdot \det P^{-1} = \\ &\quad \det P \cdot \frac{1}{\det P} \cdot \det D = \det D. \end{aligned}$$

Vi kan vere sikre på at $\det P \neq 0$ fordi P tydelegvis er invertibel. Altså:

$$\underline{\det A = \det D} \quad .$$

Oppgave 6

a) En generell cosinus-funksjon kan se slik ut:

$$f(t) = a \cos(k(x - c)) ,$$

der $|a|$ er amplituden og c er faseforskyvninga. Bølgetallet k relaterer seg til frekvensen f slik: $k = 2\pi f$, og til perioden p slik: $k = 2\pi/p$. Perioden og frekvensen er relatert slik: $p = 1/f$. Om vi velger oppover til å være positiv retning, skal vi ha at $f(0) = -16$ – der utslaget f er gitt i mm. Siden $\cos 0 = 1$, kan vi oppfylle dette ved å la $a = -16$ og $c = 0$. Med $k = 2\pi \cdot 8.9 = 55.9$, får vi

$$\underline{f(t) = -16 \cos(55.9 t)}$$

der tida t er gitt i sekunder. Dette uttrykket er ikke entydig. Akkurat den samme funksjonen kan også skrives som $16 \cos(55.9 t + \pi)$ eller $16 \sin(55.9 t - \pi/2)$, for eksempel.

b) Vi skal løse likninga $f(2) = 16/2$:

$$\begin{aligned} -16 \cos(k t) &= 16/2 \\ \cos(k t) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vi har at $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$, slik at

$$k t = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad k t = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,$$

der n er et heltall ($n \in \mathbb{Z}$). Det gir at

$$t = \frac{2\pi}{3k} + n \cdot \frac{2\pi}{k} \quad \text{eller} \quad t = -\frac{2\pi}{3k} + n \cdot \frac{2\pi}{k},$$

Siden $k = 2\pi/p = 2\pi f$, kan dette skrives som

$$t = \frac{1}{3f} + np = 0.03745 + n \cdot 0.1124 \quad \text{eller} \quad t = -\frac{1}{3f} + np = -0.03745 + n \cdot 0.1124,$$

For $t \in [0, 2p]$ har vi følgende løsninger:

$$t = 0.03745, t = -0.03745 + p, t = 0.03745 + p \text{ og } t = -0.03745 + 2p .$$

Utslaget oppover er altså halvparten av det maksimale etter 0.0375 s, 0.0749 s, 0.150 s og 0.187 s.

- c) Nå skal vi ikke lenger la a være konstant; $|a|$ skal avta eksponentielt. Vi kan skrive den som

$$a(t) = -16 e^{-bt} .$$

Vi bestemmer konstanten b ved hjelp av kravet

$$a(7p) = \frac{a(0)}{10} .$$

Perioden $p = 1/f = 1/8.9 = 0.1124$. Det gir at

$$\begin{aligned} -16 e^{-b7p} &= -\frac{16}{10} \\ e^{-b7p} &= \frac{1}{10} \\ -7pb &= \ln \frac{1}{10} = -\ln 10 \\ b &= \frac{\ln 10}{7p} = \frac{\ln 10}{7 \cdot 0.1124} = 2.928 . \end{aligned}$$

Vi kunne også satt opp $a(t)$ slik: $a(t) = -16 \cdot (1/10)^{\frac{t}{7p}}$. Dette er jo en eksponentialfunksjon, og vi ser at når $t = 7p$, er $a = -16 \cdot 1/10$ – slik vi skulle ha. (Dette gir selvsagt det samme som det vi fant over; $(1/10)^{\frac{1}{7p}} = e^{-2.928}$.)

Om vi setter vår nye $a(t)$ inn i uttrykket fra a), får vi følgende modell for svinginga:

$$\underline{g(t) = -16 e^{-2.93t} \cos(55.9t) .}$$

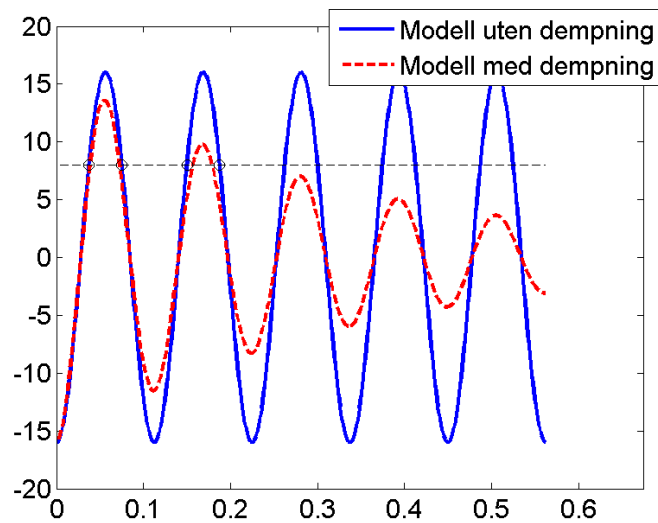
- d) Plottinga kan gjøres slik i MATLAB:

```
>> f=8.9;
>> p=1/f;
>> t=0:(p/100):(5*p);
>> f=-16*cos(55.9*t);
>> g=-16*exp(-2.93*t).*cos(55.9*t);
>> plot(t,f,'b-', 'linewidth',2)
>> hold on
>> plot(t,g,'r--', 'linewidth',2)
>> legend('Modell uten dempning','Modell med dempning')
```

Vi har også valgt å plote inn løsningene fra deloppgave b) – som kontroll:

```
>> plot([0 5*p],[1 1]*16/2,'k--')  
>> plot([0.0375 0.0749 0.150 0.187],[1 1 1 1]*16/2,'ko')  
>> set(gca,'fontsize',15)
```

Resultatet er vist i figur 3.



Figur 3: De to svinge-modellene fra oppgave 6. Vi har også tatt med linja $y = 16/2$ (stipla) og løsningene fra deloppgave b) (små sirkler).