

Innlevering i BYFE 1000
 Oppgavesett 1
Innleveringsfrist: 10. oktober klokka 14:00
Antall oppgaver: 6

Løsningsforslag

Oppgave 1

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +6x_2 & +x_3 & = 8 \\ x_1 & +3x_2 & & = 2 \\ 3x_1 & +9x_2 & +x_3 & = 10 \end{array}.$$

a) Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Vi kontrollerer svaret i MATLAB¹:

```
>> format compact
>> Tot=[2 6 1 8; 1 3 0 2; 3 9 1 10]
Tot =
     2     6     1     8
     1     3     0     2
     3     9     1    10
>> rref(Tot)
ans =
     1     3     0     2
     0     0     1     4
     0     0     0     0
```

b) Fra totalmatrisa ser vi at

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 4 \end{array},$$

¹» `format compact`-kommandoen gjør at ting blir skrevet til skjerm med litt færre mellomrom.

mens x_2 er fri. Om vi skriver løsninga på vektor-form, får vi

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 3x_2 \\ x_2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi veit at løsninga av et konsistent likningssystem på forma $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid kan skrives på forma $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}_h$ der $\vec{p}$ er ei spesiell løsning av den inhomogene likninga og $\vec{v}_h$ er den generelle løsninga av den homogene likninga, $A\vec{x} = \vec{0}$. Av løsninga over ser vi at løsninga av den tilsvarende homogene likninga er

$$\vec{v}_h = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kontroll:

$$A\vec{v}_h = x_2 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 0 \\ 3 \cdot (-3) + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

c) Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & s & 3 \\ 3 & 1 & t \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & s & 3 \\ 0 & 1 - 3s & t - 9 \end{bmatrix}$$

Her har vi lagt -3 ganger rekke 1 til rekke 2.

For at likningssystemet skal være inkonsistent, må vi ha et ledende tall i søyla lengst til høyre. For at dette skal skje, må vi kreve at $1 - 3s = 0$ og at $t - 9 \neq 0$. Altså må vi ha at

$$s = \frac{1}{3} \quad \text{og} \quad t \neq 9.$$

Oppgave 2

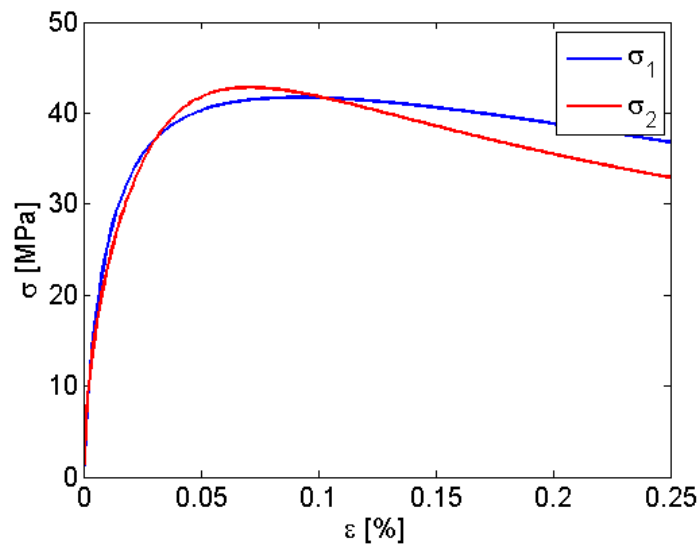
$$\begin{aligned} \sigma_1(\varepsilon) &= 50 \frac{k(\varepsilon - \varepsilon^2)}{1 + (k-2)\varepsilon} \quad \text{med} \quad k = 100 \quad \text{og} \\ \sigma_2(\varepsilon) &= 12 \frac{\arctan(20\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon + 0.001}}. \end{aligned}$$

a) Plottet kan lages slik:

```
>> x=0:1e-3:.25;
>> k=100;
>> sigma1=50*k*(x-x.^2)./(1+(k-2)*x);
>> sigma2=12*atan(20*x)./sqrt(x+.001);
```

```
>> plot(x,sigma1,'linewidth',2)
>> hold on
>> plot(x,sigma2,'r','linewidth',2)
>> hold off
>> set(gca,'fontsize',15)
>> xlabel('\epsilon [%]')
>> ylabel('\sigma [MPa]')
>> legend('\sigma_1','\sigma_2')
```

Her har vi brukt LaTeX-kode for å få greske bokstaver på plottet. Dette er selvsagt ikke noe vi krever at dere skal kunne; vi gjorde det bare for å få det til å se mest mulig pent ut. Plottet er vist i figur 1



Figur 1: Svaret på oppgave 2 a). Figuren viser spenning/tøynings-kurver for to ulike typer betong.

b) Vi løser likninga²:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(\varepsilon) &= 25 \\
 50 \frac{k(\varepsilon - \varepsilon^2)}{1 + (k - 2)\varepsilon} &= 25 \\
 50 \frac{100(\varepsilon - \varepsilon^2)}{1 + 98\varepsilon} &= 25 \\
 \frac{200\varepsilon - 200\varepsilon^2}{1 + 98\varepsilon} &= 1 \\
 200\varepsilon - 200\varepsilon^2 &= 1 + 98\varepsilon \\
 200\varepsilon^2 - 102\varepsilon + 1 &= 0 \\
 \varepsilon &= \frac{-(-102) \pm \sqrt{(-102)^2 - 4 \cdot 200 \cdot 1}}{2 \cdot 200} = \frac{102 \pm 98}{400}
 \end{aligned}$$

Pluss-løsninga ligger utenfor definisjonsområdet. Vi får:

$$\varepsilon = \frac{102 - 98}{400} = 0.01$$

Altså, for betong av type 1 vil spenninga vere 25 MPa når tøyninga er 0.01%. Dette svaret er eksakt; vi kan sette så mange nuller vi vil etter ett-tallet.

c) Her skal vi løse likninga

$$\begin{aligned}
 \sigma_2(\varepsilon) &= 25 \\
 12 \frac{\arctan(20\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon + 0.001}} &= 25 \\
 12 \frac{\arctan(20\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon + 0.001}} - 25 &= 0
 \end{aligned}$$

Vi har ingen teknikker for å løse ei slik likning med papir og blyant. I stedet kan vi løse den i MATLAB ved hjelp av for eksempel intervallhalveringsmetoden. For å gjøre dette, trenger vi endepunkter a og b som gir ulike fortegn for venstresida i likninga over. Ut fra plottet, kan det se ut til at $a = 0$ og $b = 0.05$ er gode kandidater. Vi sjekker:

```

>> x=0;
>> sigma2=12*atan(20*x)./sqrt(x+.001);
>> sigma2-25
ans =
    -25
>> x=.05;
>> sigma2=12*atan(20*x)./sqrt(x+.001);

```

²Her tar vi med veldig mange mellomregninger; det er nødvendig å gjøred et fullt så omstendelig.

```
>> sigma2-25
ans =
    16.7336
```

Her ser vi at $\sigma_2(0) - 25$ er negativt og at $\sigma_2(0.05) - 25$ er positivt. Så disse verdiene for a og b kan brukes.

Intervallhalveringsmetoden kan implementeres slik:

```
1 % Skript som løser likninga f(x)=0 ved intervallhalveringsmetoden
2 % Vi bestemmer grensene a og b i skriptet. Funksjonen f(x) er gitt i
3 % ei separat funksjonfil som heter HalveringsFunk.
4
5 % Bestemmer grenser
6 a=0;
7 b=0.05;
8
9 % Bestemmer presisjonen
10 Pres=5e-5;
11
12 % Funksjonsverdier i endepunktene
13 fa=HalveringsFunk(a);
14 fb=HalveringsFunk(b);
15
16 % Vi halverer intervallet så lenge bredden er større enn Pres
17 while abs(b-a)>Pres
18     c=(a+b)/2;           % Midtpunktet
19     fc=HalveringsFunk(c); % Funksjonverdi i midtpkt.
20     if fc*fa>0
21         a=c;
22     else
23         b=c;
24     end
25 end
26
27 % Gir svaret som det siste midtpunktet (skriver til skjerm, langt format)
28 format long
29 x=(a+b)/2
30 format short
```

Skriptet har vi kalt “HalveringsMet.m”. Siden svaret skal ha minst fire rette desimaler, har vi satt presisjonen til å være $5 \cdot 10^{-5}$ (se linje 10 og 17). (Rettnok hadde 10^{-4} vært nøyaktig nok siden vi regner ut midtpunktet på nytt i linje 29.) For å få svaret med mange desimaler, har vi satt inn ‘format long’ før vi skriver svaret til skjerm (linje 28).

Siden funksjone vil skal finne nullpunktet til er litt “krøkkete”, har vi lagd en egen funksjonsfil for denne – så vi slipper å skrive den flere ganger.

Denne heter “HalveringsFunk.m”, og ser slik ut:

```
1 function F=HalveringsFunk(x)
2
3 % Funksjon som blir brukt av skriptet HalveringsMet, som
4 % implementerer intervallhalveringsmetoden.
5
6 F=12*atan(20*x)./sqrt(x+.001)-25;
```

I skriptet `HalveringsMet` blir funksjonen `HalveringsFunk` kalt i linjene 13, 14 og 19. Her kunne vi selvsagt også ha skrevet funksjonsuttrykket direkte i stedet.

Vi kjører skriptet i MATLAB:

```
>> HalveringsMet
x =
    0.012182617187500
```

Altså, for betong av type 2, vil spenninga vere 25 MPa når tøyninga er 0.0122%.

Oppgave 3

Gitt:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

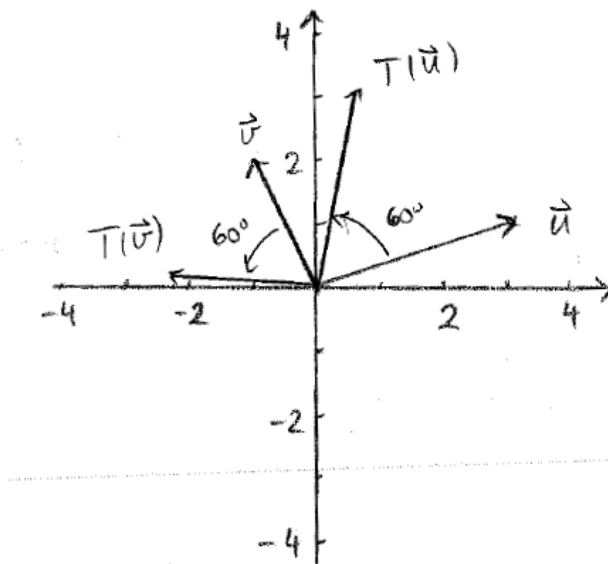
a) Med $\theta = \pi/3$:

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \vec{x} \\ T(\vec{u}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \cdot 3 - \sqrt{3}/2 \cdot 1 \\ \sqrt{3}/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.63 \\ 3.10 \end{bmatrix} \\ T(\vec{v}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 + 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2.23 \\ 0.13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Se figur 2.

c) Standardmatrisa til U , som vi kan kalle A , finner vi ved å sette inn $\theta = \pi/2$ i det gitte uttrykket:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Figur 2: Svaret på deloppgave 4 b).

Altså kan vi skrive transformasjonen U som $U(\vec{x}) = A\vec{x}$ der $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Standarmatrisa til V , som vi kaller B , kan vi finne ved å sette inn transformasjonen av enhetsvektorene $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ og $\vec{e}_3$ som søyler,

$$B = [V(\vec{e}_1)|V(\vec{e}_2)|V(\vec{e}_3)] .$$

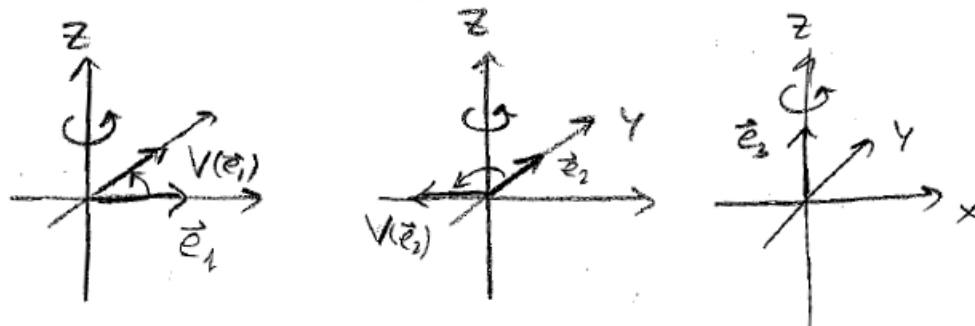
Om vi roterer $\vec{e}_1$, som er parallell med x -aksen, 90° mot klokka omkring z -aksen, får vi enhetsvektoren langs y -aksen – altså $\vec{e}_2$. Tilsvarende vil en slik rotasjon av $\vec{e}_2$ gi $-\vec{e}_1$, mens $\vec{e}_3$, som er parallell med z -aksen, forblir uforandret. Se figur 3.

Dermed blir standarmatrisa

$$B = [\vec{e}_2 | -\vec{e}_1 | \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

og $V(\vec{x}) = B\vec{x}$.

- d) Det er tydelig at rekkefølgen vi gjør disse rotasjonene i, spiller ei rolle. Dette er illustrert i figur 4. Her ser vi at boka havner i ulike stillinger dersom vi gjør rotasjonen U først og så V eller om vi først gjør transformasjonen V og så U .



Figur 3: Illustrasjon til deloppgave 2c).

e) Vi kan skrive de sammensatte transformasjonene slik:

$$\begin{aligned} U(V(\vec{x})) &= U(B\vec{x}) = A(B\vec{x}) = AB\vec{x} \\ V(U(\vec{x})) &= V(A\vec{x}) = B(A\vec{x}) = BA\vec{x} \end{aligned}$$

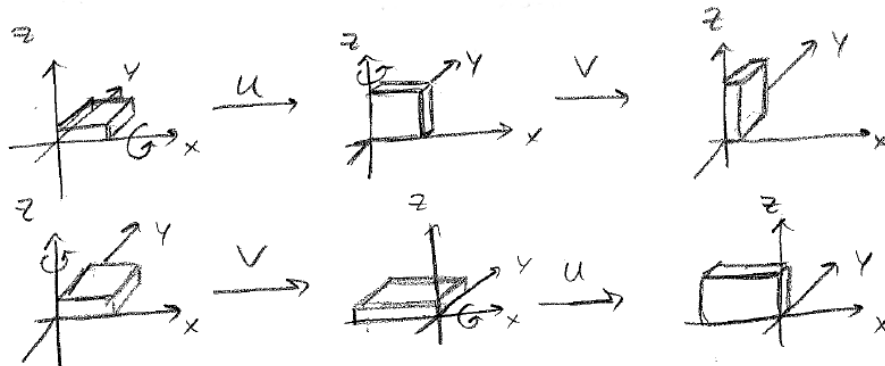
Av dette ser vi at standardmatrisa til den sammensatte transformasjonen $U(V(\vec{x}))$ er AB , og at standardmatrisa for den sammensatte transformasjonen $V(U(\vec{x}))$ er BA . Vi regner ut disse matriseproduktene:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi ser at disse to standardmatrisene er ulike, noe som bekrefter konklusjonen fra forrige deloppgave: Rekkefølgen spiller en rolle.

Oppgave 4

- To vektorer er lineært avhengige hvis og bare hvis den ene kan skrives som et tall ganger den andre. Dette er ikke tilfelle her. Derfor er vektorene lineært uavhengige.
- For å avgjøre om vektorene er lineært uavhengige, setter vi de opp som



Figur 4: Illustrasjon til deloppgave 2d).

søyler i ei matrise og rekkereudserer denne til trappeform:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

Her har vi først trukket rekke 1 fra rekke tre og så trukket rekke 2 fra rekke 1. Så har vi lagt -2 ganger rekke 1 til rekke 2. Det neste vi har gjort, er å trekke rekke 3 fra rekke 2 – for å få det ledende tallet i rekke 2 til å bli 1. Til slutt har vi lagt 3 ganger rekke 2 til rekke 3.

Matrisa er nå på trappeform, og den har et ledende tall i hver søyle. Vektorene er derfor lineært uavhengige.

- c) Her er det snakk om 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$. Siden vi har flere vektorer enn det er komponenter i hver vektor, må de være lineært avhengige.

Oppgave 5

Begge summene har såpass mange elementer at det er lite aktuelt å regne dem ut med papir og blyant og kalkulator. Vi gjør det heller i MATLAB.

- a) Dette lille skriptet finner summen:

```
1 % Skript som regner ut en sum
2
```

```

3 % Setter summen til 0
4 S=0;
5
6 for i=0:500
7     S=S+1/sqrt(i^3+1);    % Legger til leddet
8 end
9
10 % Skriver svaret til skjerm
11 S

```

Vi kjører skriptet i MATLAB:

```

>> FinnSum
S =
    3.2047

```

Altså:

$$\sum_{i=0}^{500} \frac{1}{\sqrt{i^3+1}} \approx \underline{3.205}.$$

- b) Her kan vi godt justere på skriptet fra a) for å finne summen. Det er naturlig å innføre en ny variabel: Δx .

```

1 % Skript som regner ut en sum
2
3 % Setter summen til 0
4 S=0;
5
6 % Bestemmer Delta x
7 DeltaX=5/100;
8
9 for i=1:100
10     xi=-1+(i-1)*DeltaX;    % Bestemmer x_i
11     fi=xi*sqrt(xi+1);      % Bestemmer f(x_i)
12     S=S+fi;                % Legger til leddet
13 end
14
15 % Skriver svaret til skjerm
16 Svar=DeltaX*S

```

Her har vi justert både nedre og øvre grense for summen (linje 9). I tillegg har vi tatt med to linjer inni for-løkken som regner ut x_i og $f(x_i)$ (linje 10 og 11).

Vi kjører skriptet:

```

>> FinnSum
Svar =
    14.6865

```

Altså:

$$\Delta x_{100} \sum_{i=1}^{100} f(x_i) \approx \underline{14.687} .$$

Dette er et eksempel på en *Riemann-sum*. Slike summer kommer vi tilbake til når vi skal begynne å integrere.

Oppgave 6

- a) I rom 1 har vi en ovn som avgir 900 W. Siden temperaturen i rom 1 skal være konstant, må det totale varmetapet være lik effekten fra ovnen. Varmetapet ut av huset er $10(T_1 - T_{\text{ute}})$, tapet til rom 2 er $50(T_1 - T_2)$ og til rom 3 er varmetapet $100(T_1 - T_3)$. Ingen varme blir avgitt til rom 4. Vi får

$$\begin{aligned} 10(T_1 - T_{\text{ute}}) + 50(T_1 - T_2) + 100(T_1 - T_3) &= 900 \\ (10 + 50 + 100)T_1 - 10 \cdot (-5) - 50T_2 - 100T_3 &= 900 \\ 160T_1 - 50T_2 - 100T_3 + 0 \cdot T_4 &= 850 \end{aligned}$$

I rom 2 er det ingen varmeovn. Derfor skal netto varmetap være null:

$$\begin{aligned} 10(T_2 - T_{\text{ute}}) + 50(T_2 - T_1) + 70(T_2 - T_4) &= 0 \\ -50T_1 + 130T_2 + 0 \cdot T_3 - 70 \cdot T_4 &= -50 \end{aligned}$$

På samme måte får vi for rom 4:

$$\begin{aligned} 10(T_4 - T_{\text{ute}}) + 70(T_4 - T_2) + 40(T_4 - T_3) &= 0 \\ 0 \cdot T_1 - 70T_2 - 40T_3 + 120 \cdot T_4 &= -50 \end{aligned}$$

Likninga for rom 3 er alt gitt i oppgava. Til sammen får vi dette liknings-systemet:

$$\begin{array}{ccccccc} 160 T_1 & -50 T_2 & -100 T_3 & & & & = 850 \\ -50 T_1 & +130 T_2 & & & -70 T_4 & & = -50 \\ -100 T_1 & & +150 T_3 & & -40 T_4 & & = -50 \\ & -70 T_2 & -40 T_3 & +120 T_4 & & & = -50 \end{array} .$$

- b) Vi setter opp totalmatrisa og rekkereduserer – i MATLAB:

```
>> T=[160 -50 -100 0 850
-50 130 0 -70 -50
-100 0 150 -40 -50
0 -70 -40 120 -50]
T =

    160    -50   -100     0    850
```

```

-50  130   0  -70  -50
-100   0  150  -40  -50
  0  -70  -40  120  -50
>> rref(T)
ans =
  1.0000         0         0         0  21.4583
         0  1.0000         0         0  15.8333
         0         0  1.0000         0  17.9167
         0         0         0  1.0000  14.7917

```

Med enheter før vi altså løsninga

$$\underline{T_1 = 21.46^\circ\text{C}, T_2 = 15.83^\circ\text{C}, T_3 = 17.92^\circ\text{C} \text{ og } T_4 = 14.79^\circ\text{C} .}$$