

Innlevering i BYFE 1000
Oppgavesett 1
Innleveringsfrist: 10. oktober klokka 14:00
Antall oppgaver: 6

Noen av disse oppgavene løses ved hjelp av papir og blyant, mens andre oppgaver løses ved hjelp av MATLAB¹ – og til noen oppgaver trenger du begge deler. Alle svar skal begrunnes. I besvarelsen din skal alle relevante plott og m-filer, funksjonsfiler og skript, være med. “Lim inn” alle relevante utregninger og kommandoer som er utført i kommandovinduet i MATLAB. Besvarelsen kan være en blanding av håndskrevne sider og data-utskrifter, eller den kan være skrevet i et tekstbehandlingsprogram (OpenOffice, Word, LaTeX etc.) med figurer, kommandoer og m-filer limt inn.

I utgangspunktet krever vi 70 % uttelling for å godkjenne en besvarelse. I tillegg krever vi at MATLAB-oppgavene er gjort på en tilfredsstillende måte; det er ikke mulig å få godkjent innleveringa uten å ha brukt MATLAB.

Oppgave 1

Dette likningssystemet er gitt:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +6x_2 & +x_3 & = & 8 \\ x_1 & +3x_2 & & = & 2 \\ 3x_1 & +9x_2 & +x_3 & = & 10 \end{array}.$$

- a) Sett opp totalmatrisa for likningssystemet og rekkereudusér denne til re-dusert trappeform. Kontroller svaret ditt i MATLAB.
- b) Bruk svaret i a) til å finne den generelle løsningen av likningssystemet. Bruk dette svaret til å skrive opp løsningen av det tilsvarende *homogene* likningssystemet.
- c) Et annet likningssystem er gitt som

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

der

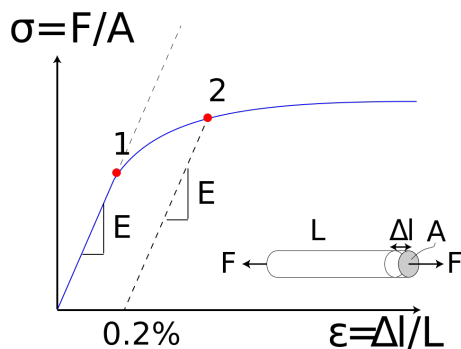
$$A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ t \end{bmatrix}.$$

Bestem parametrene s og t slik at likningssystemet blir inkonsistent.

¹Om man heller vil gjøre numeriske beregninger i et annet språk, som for eksempel Python, Octave, C++ etc., er det helt ok.

Oppgave 2

Innen byggfag er det viktig å vite hvordan et material utvider seg eller trekker seg sammen avhengig av hvilke krefter som virker på det. I denne sammenhengen studerer man gjerne spenning/tøynings-kurver. Tøynig, ε , er utvidinga/sammentrekninga av et stykke av materialet delt på lengden av hele materialet, og spenning, σ , er krafta som virker vinkelrett på endestykkene av det aktuelle materialet delt på arealet². Se figur 1.



Figur 1: Figuren viser en typisk spenning/tøying-kurve.

Vi tenker oss at disse funksjonene gir sammenhengen mellom σ og ε for to ulike typer betong:

$$\begin{aligned}\sigma_1(\varepsilon) &= 50 \frac{k(\varepsilon - \varepsilon^2)}{1 + (k-2)\varepsilon} \quad \text{med } k = 100 \quad \text{og} \\ \sigma_2(\varepsilon) &= 12 \frac{\arctan(20\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon + 0.001}}.\end{aligned}$$

Definisjonsmengden for begge funksjonene er $D_\sigma = [0, 0.25]$. Enheten for ε er prosent, mens enheten for σ er MPa (mega-Pascal).

- Bruk MATLAB til å plotte grafene til σ_1 og σ_2 i samme koordinatsystem.
- Bestem ε slik at $\sigma_1 = 25$.
- Bestem ε slik at $\sigma_2 = 25$.

Svarene i b) og c) skal være gitt med minst fire riktige desimaler.

²Symbolene ε og σ , “epsilon” og “sigma”, er greske bokstaver. De tilsvarer de latinske bokstavene e og s.

Oppgave 3

Å rotere et objekt i planet en vinkel θ omkring origo kan beskrives ved den lineære transformasjonen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad .$$

Vi regner *mot klokka* for å være positiv omdreiningsretning.

- a) La nå $\theta = \pi/3 = 60^\circ$. Finn $T(\vec{u})$ og $T(\vec{v})$ der

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

- b) Tegn de fire vektorene $\vec{u}$, $T(\vec{u})$, $\vec{v}$ og $T(\vec{v})$ inn i et koordinatsystem.
- c) I rommet, $\mathbb{R}^3$, er ikke “rotasjon omkring origo” et særlig presist begrep; det er mange måter å rotere omkring origo på. Derimot kan man gjerne snakke om rotasjon omkring en akse. For eksempel har transformasjonen gitt ved rotasjon med vinkelen θ omkring x -aksen denne standardmatrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad .$$

La transformasjonene U , fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, være gitt som rotasjon $\pi/2 = 90^\circ$ omkring x -aksen, og la transformasjonen V , også fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, være rotasjon 90° omkring z -aksen. Både U og V er lineære transformasjoner³.

Finn standardmatrisene for transformasjonene U og V .

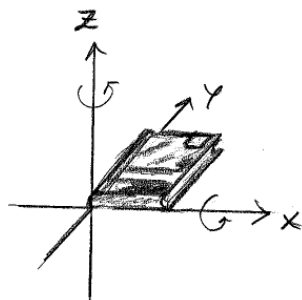
- d) Dersom vi utfører begge transformasjonene U og V på en vektor, spiller rekkefølgen vi utfører transformasjonene i noen rolle?

Du kan finne svaret på dette spørsmålet ved å ta fatt i ei bok og se for deg et koordinatsystem foran deg, se figur 2. La x -aksen peke fra venstre mot høyre, y -aksen framover og z -aksen oppover, og legg boka i xy -planet (på bordet) med nedre venstre hjørne i origo (se figuren). Hvis du roterer den 90° omkring x -aksen og så 90° omkring z -aksen, står da boka i samme posisjon som den ville ha gjort om du i stedet først roterte den 90° omkring z -aksen og så 90° omkring x -aksen?

Illustrér svaret med ei skisse.

- e) Bekreft konklusjonen i deloppgave d) ved å sammenligne standardmatrisene til de sammensatte transformasjonene $V(U(\vec{x}))$ og $U(V(\vec{x}))$.

³Du trenger ikke å vise dette.



Figur 2: Skisse som illustrer rotasjonene i oppgave 3 d).

Oppgave 4

Avgjør om følgende tre sett med vektorer er lineært uavhengige:

a)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Oppgave 5

Regn ut disse summene:

a)

$$\sum_{i=0}^{500} \frac{1}{\sqrt{i^3 + 1}}$$

b)

$$\Delta x_{100} \sum_{i=1}^{100} f(x_i) \quad ,$$

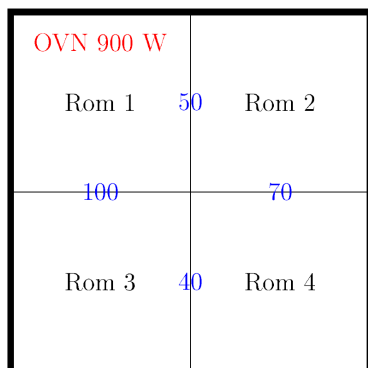
der $\Delta x_{100} = (4 - (-1))/100$, $x_i = -1 + (i - 1)\Delta x_{100}$ og $f(x) = x\sqrt{x + 1}$.

Oppgave 6

En én-etages leilighet har fire rom. Vi ser bort fra varmetap til leiligheten over og under vår leilighet. Det står en ovn som avgir 900 W (Watt) i rom 1. Varmetapet gjennom hver vegg er proporsjonal med temperaturdifferansen på hver side av vegg, for eksempel vil

$$P = k(T_a - T_b)$$

gi varmetapet fra rom a til rom b. Proporsjonalitetskonstanten k , som vi kaller *varmeoverføringskoeffisienten*, er spesifikk for hver vegg. Anta at temperaturen ute er $T_{\text{ute}} = -5^\circ\text{C}$ og at varmetapet utover for hver av de fire rommene er proporsjonalt til temperaturdifferansen med varmeoverføringskoeffisient $10\text{ W}/^\circ\text{C}$. Mellom rommene er det ikke så godt isolert: Mellom rom 1 og 2 er varmeoverføringskoeffisienten $50\text{ W}/^\circ\text{C}$, mellom rom 1 og 3 er koeffisienten $100\text{ W}/^\circ\text{C}$, mellom rom 2 og 4 er koeffisienten $70\text{ W}/^\circ\text{C}$, mellom rom 3 og 4 er koeffisienten $40\text{ W}/^\circ\text{C}$. Temperaturen i rom 1 kan kalles T_1 og så videre. Se figur 3.



Figur 3: Illustrasjon til oppgave 6.

- a) Sett opp et likningssystem som bestemmer temperaturen i hvert rom når disse har stabilisert seg.

Dette kan du gjøre ved å sett opp et regnskap for varmetap for hver av de fire rommene. For rom 3, for eksempel, er total varmetap lik 0. Derfor må

$$10(T_3 - T_{\text{ute}}) + 100(T_3 - T_1) + 40(T_3 - T_4) = 0.$$

(Vi tar ikke med enhetene.) Dette er det samme som

$$-100 T_1 + 0 \cdot T_2 + 150 T_3 - 40 T_4 = -50.$$

- b) Bruk MATLAB til å løse likningssystemet og bestemme temperaturene⁴.

⁴Denne oppgava er laga av Halvard Fausk.