

Foredlesing 5/2

① Beskjeder

Minner om to alternative opplegg for repetisjonstimmar (same tid)

Mikro i dag: Algoritmar i MATLAB

Velje 8: Ikkje forelesing, relene øvingar som normalt - bortsett frå at øvinga frå 8:30 ons. 18/2 utgår

② Repetisjon:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + K_1 h, \quad K_1 = \frac{f''(c)}{2}, \quad c \in [a, a+h]$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + K_2 h^2, \quad K_2 = \frac{f^{(3)}(c)}{6}, \quad c \in [a-h, a+h]$$

↑
NB

② Hvorfor er typisk feilen minst med midtpunkt formelen?

Hvis h er liten, er h^2 mye mindre

③ Nytt eksempel med Taylor-polynom (s. 11 og 12 i notat fra 29/1)

④ Anti-derivasjon (6.1-6.3)

Delong: $6/2 = 3$

- "Kva må vi gange 2 med for å få 6?"

Anti-derivasjon

- "Kva har vi derivert for å få $f(x)$?"

Dersom $F'(x) = f(x)$, seier vi at $F(x)$ er en anti-derivert til $f(x)$.

Eksempel

x^2 er en anti-derivert til $2x$

fordi $(x^2)' = 2x$

$x^2 + 5$ er også en anti-derivert til $2x$.

Teorem

Dersom $F(x)$ og $G(x)$ begge er anti-deriverte til samme funksjon $f(x)$, er $F(x) = G(x) + C$ der C er en konstant.

Viser:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x)$$

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$(F(x) - G(x))' = 0$$

Ⓢ Kva har 0 som derivert?

- Berre konstanter, $F(x) - G(x) = C$

Alttså: Hvis $F'(x) = f(x)$, kan alle antideriverte til $f(x)$ skrives som $F(x) + C$. Dette kaller vi det ubestemte integral til $f(x)$, og vi skriver:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Kva har anti-derivasjon med integral & spere?

I utgangspunktet: Ingen ting. Sammenhengen heter "analysens fundamentalteorem".

-Klar tilbake til dette.

Foreløpig: $\int f(x) dx$ er ein skrivemåte for den generelle anti-deriverte til $f(x)$.
dx: Same som " $\frac{df}{dx}$ ".

Er C-en viktig? JA.

⑤ Tekniker for anti-derivasjon

- For hver derivasjonsregel, har vi en anti-derivasjonsregel; vi les regelen berre motsett veg.

Deriv.

Anti-deriv.

Linearitet:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(c f(x))' = c f'(x)$$

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

Produktregelen

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

[?] Delvis int.

$$\int (u v)' dx = uv + C$$

$$\int (u v)' dx = \int u' v dx + \int u v' dx$$

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

[?] C-en?

Kjernerregelen

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

[?] Variablebyte / substitution

$$F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u) \cdot u'(x) = f(x) u'(x)$$

$$\int f(x) u'(x) dx = F(u) + C = \int f(u) du$$

$$\int f(x) u'(x) dx = \int f(u) du$$

Beispiel

Finde $\int (x^3 + 2 \sin x) dx$

Linearität: $\int (x^3 + 2 \sin x) dx = \int x^3 dx + 2 \int \sin x dx$

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4} \cdot (x^4)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3, \quad \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C_2$$

Ich hier lieber
differenzieren dann

Also: $\int (x^3 + 2 \sin x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \cos x + C$

Wichtige elementare Funktionen

$$(x^r)' = r x^{r-1}$$

[?] Für alle r ? Ja

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

[?] Für alle r ? Nein, $r \neq -1$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

Meist generelt:

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln|x| + C_1, & x > 0 \\ \ln|x| + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Exempel

Finns dessa bestämda integraler:

a) $\int (5x^{3.17} + e^x) dx$

b) $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

c) $\int x \sin x dx$

d) $\int \cos x e^{\sin x} dx$

a) $\int (5x^{3.17} + e^x) dx = 5 \int x^{3.17} dx + \int e^x dx =$

$$5 \cdot \frac{1}{4.17} x^{4.17} + e^x + C = \frac{500}{417} x^{4.17} + e^x + C$$

b) $\int \frac{x^2+1}{x} dx = \int (x + \frac{1}{x}) dx = \frac{1}{2} x^2 + \ln|x| + C$

↑
droppar del
förskifft

c) Delvis integration: $\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin x \Leftarrow v = -\cos x$

$$\int x \sin x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx =$$

$$-x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C'$$

Kontroll $\boxed{?}$ korrek?!

$$(-x \cos x + \sin x + C')' = -(1 \cdot \cos x + x(-\sin x)) + \cos x + 0 =$$

$$-\cos x + x \sin x + \cos x = \underline{x \sin x} \quad \text{OK}$$

d) Variablenbyte: $u = \sin x$

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad du = \cos x \, dx, \quad dx = \frac{1}{\cos x} \, du$$

↑
Differential

$$\int \cos x \, e^{\sin x} \, dx = \int \cos x \, e^u \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{dx} \, du =$$

$$\int e^u \, du = e^u + C' = e^{\sin x} + C'$$

NB!

$$\text{Kontroll: } (e^{\sin x} + C')' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' + 0 = \cos x \, e^{\sin x} \quad \text{OK}$$

⑥ Variabelbyte med lineære kerner

Eksempel

Find disse integraler

a) $\int \cos(2x+1) dx$

b) $\int f(ax+b) dx$ giv os $F(x) = f(x)$

c) $\int \frac{1}{2x-1} dx \quad (x > \frac{1}{2})$

d) $\int \frac{1}{x^2-2x+5} dx$

a) Variabelbyte: $u = 2x+1, \frac{du}{dx} = 2, dx = \frac{1}{2} du$

$$\int \cos(2x+1) dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos u du =$$

$$\frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C$$

b) Samme logik:

$$u = ax+b, \frac{du}{dx} = a, dx = \frac{1}{a} du$$

Viit: $\int f(x) dx = F(x) + C$

$$\int f(ax+b) dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int f(u) du =$$

$$\frac{1}{a} F(u) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Poeng: Det vi gjorde i a) er ret
men tungvindt.

ser direkte:

$$\text{Når } \int \cos x \, dx = \sin x + C, \text{ er}$$

$$\int \cos(2x+1) \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin(2x+1) + C}}$$

$$c) \text{ Veit: } \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{2x-1} \, dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln(2x-1) + C}}$$
$$= \ln \sqrt{2x-1} + C \quad (x > \frac{1}{2})$$

$$d) \quad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \text{ slik at}$$

$$(x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$$

$$\text{Veit: } \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5} \, dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{4\left(\frac{(x-1)^2}{4} + 1\right)} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} \, dx$$

2) Hva er a og b her?

$$\rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \, dx =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C}}$$

Triks med delvis integrasjon:

Lat u' vere 1.

Eksempel

Finn $\int \ln x \, dx$ og $\int \arctan x \, dx$

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx$$

$$\text{Delvis: } \int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

↑ Her dette er
enklare enn $\int u v' \, dx$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \in v = x$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx =$$
$$x \ln x - x + C$$

$$\int \arctan x \, dx = \int \arctan x \cdot 1 \, dx$$

$$u = \arctan x \Rightarrow u' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$v' = 1 \in v = x$$

$$\int \arctan x \, dx = \arctan x \cdot x - \int \frac{1}{x^2+1} \cdot x \, dx$$

$$\text{Variabelbytte: } w = x^2+1, \frac{dw}{dx} = 2x, dx = \frac{1}{2x} dw$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} x \, dx = \int \frac{1}{w} \cdot x \cdot \frac{1}{2x} dw = \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2} \ln |w| + C_2$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C =$$
$$x \arctan x - \ln \sqrt{x^2+1} + C$$