

Foredlesing 29/1

① Beskjedar

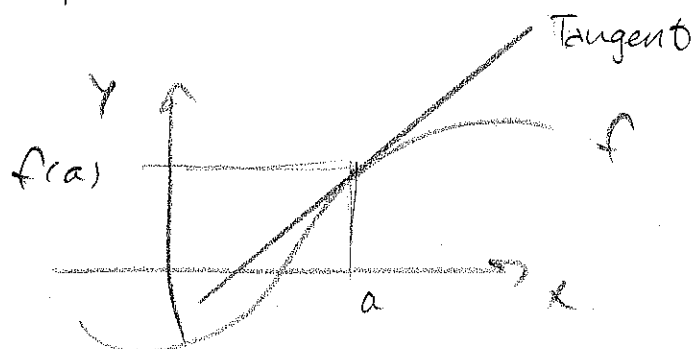
Pensum for i dag (inkl. oppgaver):

Notat p^o Frontier (utdrag fra
hæreboka vi har brukt før).

② Taylor - polynom

Brook Taylor (1685 - 1731): Engelsk matematiker

Repetisjon: Lineær tilnærming



$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$\uparrow$
 $P_L(x)$

$$P_L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Ser: Når $x \approx a$, er $f(x) \approx P_1(x)$.

Men hva betyr " $\approx$ " [?]

Vi skal gjøre dette mer presist.

Ser også:

$$\text{Når } x=a: f(a) = P_1(a)$$

$$f'(a) = P_1'(a)$$

[?] Hvorfor stoppe der?

Vi lagar eit 2.-grads polynom, P_2 , som i tillegg oppfyller at $P_2''(a) = f''(a)$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 =$$

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2$$

$$P_2(a) = f(a)$$

$$b_0 + b_1(a-a) + b_2(a-a)^2 = f(a), \quad b_0 = f(a)$$

$$P_2'(a) = f'(a)$$

$$P_2'(x) = 0 + b_1 \cdot 1 + 2b_2(x-a) \cdot 1$$

$$P_2'(a) = b_1 + 2b_2 \cdot 0 = f'(a), \quad b_1 = f'(a)$$

(Så langt det same som for P_1)

$$P_2''(x) = 0 + 2b_2 \cdot 1 = f''(a), \quad b_2 = \frac{1}{2} f''(a)$$

Altså:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Taylor-polynomiet af grad 2 for $f(x)$ omkring $x=a$.

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a): 1. \text{ grad}$$

$$0. \text{ grad: } P_0 = f(a)$$

Vi generaliserer dette til n -te grad:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

$f^{(n)}(a)$: f derivert n gonger (iusebb $x=a$)

$$f^{(0)}(a) = f(a)$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad - \text{ "n faktoriell"}$$

$$0! = 1 \quad - \text{ definert}$$

Mer kompakt: Sigma-notasjon:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

Poeng: Dess større n , dess "likere"

er $P_n(x)$ $f(x)$. Mer presist:

$P_n(x)$ ligg nær $f(x)$ i et område
kring $x=a$. Dette området er typisk
større for høyere verdi av n .

→ MATLAB-demo.

Eksempel

a) Finn Taylor-polynom for $f(x) = \sin x$
av grad 5 omkring $a = 0$

b) Finn en tilnærme verdi for
 $\sin 1$.

a) $f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x, \quad f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = +\sin x, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(5)}(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
 P_5(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x-0)^2 + \\
 &\quad \frac{1}{3!} f'''(0)(x-0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)(x-0)^4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(0)(x-0)^5 = \\
 &= 0 + 1x + \frac{1}{2} \cdot 0x^2 + \frac{1}{3!} (-1)x^3 + 0 + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 = \\
 &= x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5
 \end{aligned}$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 5! = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$b) \sin 1 = f(1) \approx P_5(1) = 1 - \frac{1}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{120} 1^5 =$$

$$\frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0.841667$$

[?] Men kan vi ikke berre bruke kalkulatoren til å finne $\sin 1$, da?
 Jo, men hva gir kalkulatoren?

③ Feilskranke

Kva meiner vi med " $\approx$ "?

Taylor's formel med restledd:

f : $(n+1)$ ganger deriverbar i eit intervall som inneheld a og x ,
 $f^{(n+1)}(x)$ er kont. i intervallet.

Då er

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

der P_n er Taylor-polynomiet til f av grad n om punktet a og

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c) \overset{\text{NB}}{(c)} (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

for ein c mellom x og a .

- Poeng: " $=$ ", ikke " $\approx$ ".
- c : ukjent, men avgrensa.
- $R_n(x)$: Restledd, liknar på neste ledd i P_{n+1} , men: " $f^{(n+1)}(c)$ ", ikke " $f^{(n+1)}(a)$ ".

Eksempel

Bruk restledd-formelen til å sette grenser for feilen vi gir når vi set
at $\sin 1 \approx \frac{101}{120}$.

✓

$$\text{Har: } f(1) = P_5(1) + R_5(1)$$

$$P_5(1) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!} (1-0)^6 = \frac{-\sin c}{6!}$$

$$c \in [0, 1] \Rightarrow -\sin c \in [-1, 0]$$

$$P_5(1) \in \left[-\frac{1}{6!}, 0\right], \quad -\frac{1}{6!} \leq P_5(1) \leq 0$$

Altså:

$$P_5(1) - \frac{1}{6!} \leq \sin 1 \leq P_5(1)$$

$$\frac{101}{120} - \frac{1}{720} \leq \sin 1 \leq \frac{101}{120}$$

$$\frac{605}{720} \leq \sin 1 \leq \frac{101}{120}$$

$$0.840278 \leq \sin 1 \leq 0.841667$$

Men: $f^{(6)}(0) = 0$

$$P_6(x) = P_5(x) + \frac{1}{6!} f^{(6)}(0) (x-0)^6 =$$

$$P_5(x) + 0 = P_5(x)$$

- Kan bruke restleddet for P_6 !

$$f(1) = P_6(1) + R_6(1) = P_5(1) + R_6(1)$$

$$R_6(1) = \frac{f^{(7)}(c)}{7!} (1-0)^7 = \frac{-\cos c}{7!}$$

Gir: $\frac{101}{120} - \frac{1}{7!} \leq \sin 1 \leq \frac{101}{120}$

$$0.84147 \leq \sin 1 \leq 0.84167$$

- Mer nøyaktig

④ Numeriske derivasjon revisited

Def.: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{Framover-formel})$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad (\text{Midtpunkt-formel})$$

[?] Kva er best?

Eksempel

For ein funksjon $f(x)$ som er 3 gonger deriverbar med kont $f^{(3)}(x)$,

a) kor stor feil gjer vi når vi seier at $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$?

b) kor stor er feilen med $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$?

a) $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x), \quad R_1(x) = \frac{f''(c)}{2!} (x-a)^2,$$

c mellom x og a .

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) + R_1(a+h)$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(c)}{2} h^2$$

$$f(a+h) - f(a) = -f'(a)h + \frac{1}{2} f''(c) h^2$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{1}{2} f''(c) h$$

Med $K_1 = -\frac{1}{2} f''(c)$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + K_1 h$$

[?] Kvifor er K_1 avgrensa?

b) $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!} (x-a)^3, \quad c \text{ mellom } a \text{ og } x$$

$$f(a+h) = P_2(a+h) + R_2(a+h) =$$

$$f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{1}{2} f''(a)(a+h-a)^2 + \frac{f'''(c_1)}{3!} h^3 =$$

$$f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + \frac{f'''(c_1)}{3!} h^3$$

$$c_1 \in [a, a+h] \quad (h > 0)$$

$$f(a-h) = P_2(a-h) + R_2(a-h) =$$

$$f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 - \frac{f'''(c_2)}{3!} h^3,$$

$$c_2 \in [a-h, a]$$

Differanse:

$$f(a+h) - f(a-h) = P_2(a+h) + R_2(a+h) - (P_2(a-h) + R_2(a-h)) =$$

$$\cancel{f(a)} + f'(a)h + \frac{1}{2} \cancel{f''(a)h^2} + \frac{f'''(c_1)}{3!} h^3 - (\cancel{f(a)} - f'(a)h + \frac{1}{2} \cancel{f''(a)h^2} - \frac{f'''(c_2)}{3!} h^3) =$$

$$2h f'(a) + \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{3!} h^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2 \cdot 3!} h^2$$

$$\text{Med } K_2 = \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2 \cdot 3!} h^2$$

$$|K_2| \leq \frac{f'''(c)}{3!} h^2, \quad c \in [a-h, a+h]$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + K_2 h^2$$

frå a):

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + k_1 h$$

[?] Kul för er $K_2 h^2$ typisk mindre enn $k_1 h$?

Hvis h er liten, er h^2 mykje mindre (0.1 vs. $0.1^2 = 0.01$)

⑤ Eksempel

Bestem $\sqrt{10}$ med en fejl som er mindre end 10^{-4}

Med $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ og $a=9$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$\text{Skal have } |R_n(10)| < 10^{-4}$$

$$R_n(10) = \frac{f^{(n+1)}(10)}{(n+1)!} \underbrace{(10-9)^{n+1}}_1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2} = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

$$R_2(10) = \frac{\frac{3}{8} x^{-5/2}}{3!} \cdot 1 = \frac{3}{48(\sqrt{e})^5}$$

$$x \in [9, 10] \Rightarrow 0 \leq R_2(10) \leq \frac{3}{48(\sqrt{e})^5} = \frac{1}{48 \cdot 3^4} \approx 2.57 \cdot 10^{-4}$$

— Ser på $R_3(10)$. — Treng $f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-7/2} = -\frac{15}{16 \cdot (\sqrt{x})^7}$$

$$R_3(10) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (10-9)^4 = -\frac{15}{4! \cdot 16 \cdot (\sqrt{e})^7}$$

$$0 \geq R_3(10) \geq - \frac{15}{4! \cdot 16 \cdot (\sqrt{9})^2} = - \frac{5}{4! \cdot 16 \cdot 3^2} \approx 1.79 \cdot 10^{-5}$$

- OK mod $P_3(10)$

$$\sqrt{10} \approx P_3(10) = f(9) + f'(9)(10-9) +$$

$$\frac{1}{2} f''(9)(10-9)^2 + \frac{1}{3!} f'''(9)(10-9)^3 =$$

$$3 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{9}} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot 9^{-3/2}\right) \cdot 1^2 +$$

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 9^{-5/2}\right) \cdot 1^3 =$$

$$3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888} = \frac{11\,664 + 648 - 18 + 1}{3888} =$$

$$\frac{12295}{3888} \approx \underline{\underline{3.1623}}$$