

Førelsing 22/1

① Beskjedar?

Til neste veke: Notat om Taylor-polynom

Nye repetisjons timer i februar:

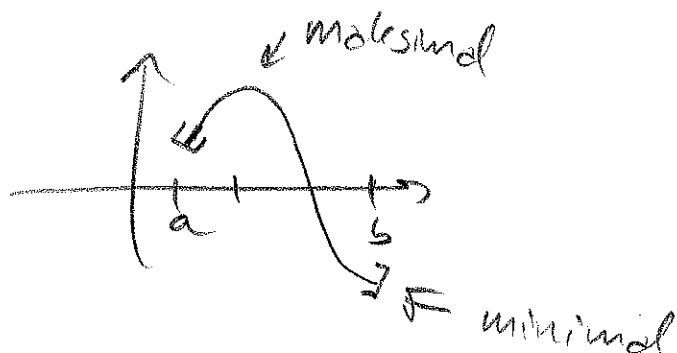
Torsdager kl. 16:30 - 18:15

[?] Kva vil de ha gjennomgått?

② Ekstremalverdisetninga (4.5)

Dersom f er ein kontinuerleg funksjon definert på eit lukket intervall, $D_f = [a, b]$, har f både (globalt) minimalpunkt og maksimalpunkt.

Eksempel:



Kva er eit maksimal-/minimalpunkt?

Dersom $f(c) \geq f(x)$ for alle x i eit område omkring c , er $f(x)$ eit lokalt maksimum.

Minimum: Same med " $\leq$ "

Maksimalpunkt: c

toppunkt: $(c, f(x))$

Fellesnavn på maks./min: Ekstremalpunkt

Eksempel

Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 1}$$

- Finn eventuelle nullpunkt til funksjonen
- Finn eventuelle asymptotar til funkt.
- Bestem når $f'(x)$ er negativ og når den er positiv
- Skisser grafen til f .

$$a) f(x) = 0$$

$$\frac{x^2+4}{x+1} = 0$$

$$x^2+4 =$$

$$x^2 = -4$$

- Inga løysing; f har ingen nullpkt.

$$b) x \rightarrow -1 \Rightarrow |f(x)| \rightarrow \infty$$

$x = -1$ er ein vertikal (loddrett) asymptote for f .

Ser: $|f(x)| \rightarrow \infty$ når $|x| \rightarrow \infty$. f har ingen horisontal (vassrett) asymptote.

- Finn skrå-asymptote ved polynom-divisjon:

$$(x^2+4):(x+1) = x - 1 + \frac{5}{x+1}$$

$$-(x^2+x)$$

$$-x+4$$

$$-(-x-1)$$

$$5$$

$$\frac{5}{x+1} \rightarrow 0 \text{ når } |x| \rightarrow \infty$$

$y = x - 1$ er ein skrå asymptote for f .

$$c) f'(x) = \frac{(x^2+4)'(x+1) - (x^2+4)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{2 \times (x+1) - (x^2+4) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-4}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

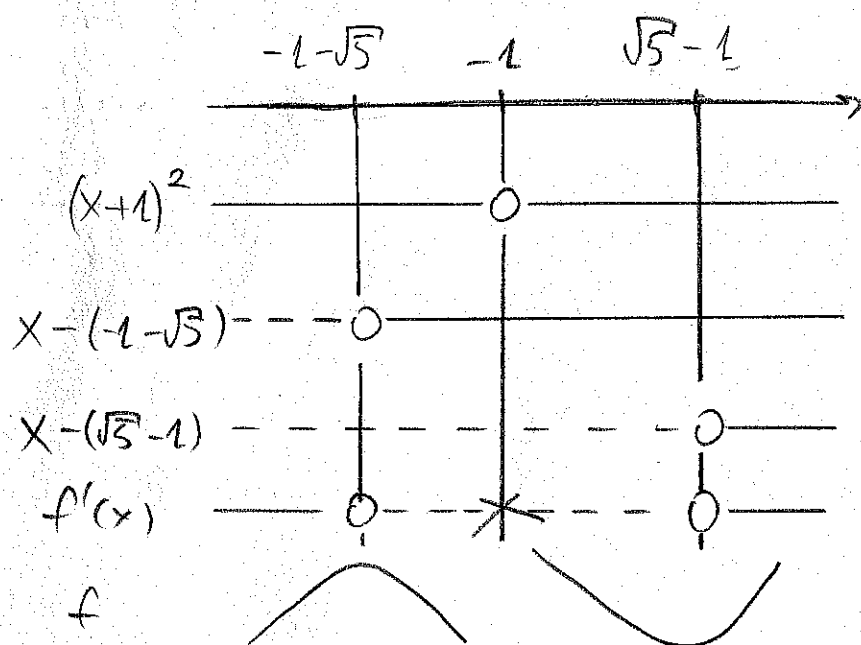
Faktorisieren belieren:

$$x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$f'(x) = \frac{1(x - (-1-\sqrt{5})) (x - (-1+\sqrt{5}))}{(x+1)^2}$$

Fortsetzungschema:



— $f'(x) > 0$
 --- $f'(x) < 0$

Intuitiv: $f' > 0$: f går oppover

$f' < 0$: f går nedover

$x = -1 - \sqrt{5} \approx -3.23$: Maksimalpt.

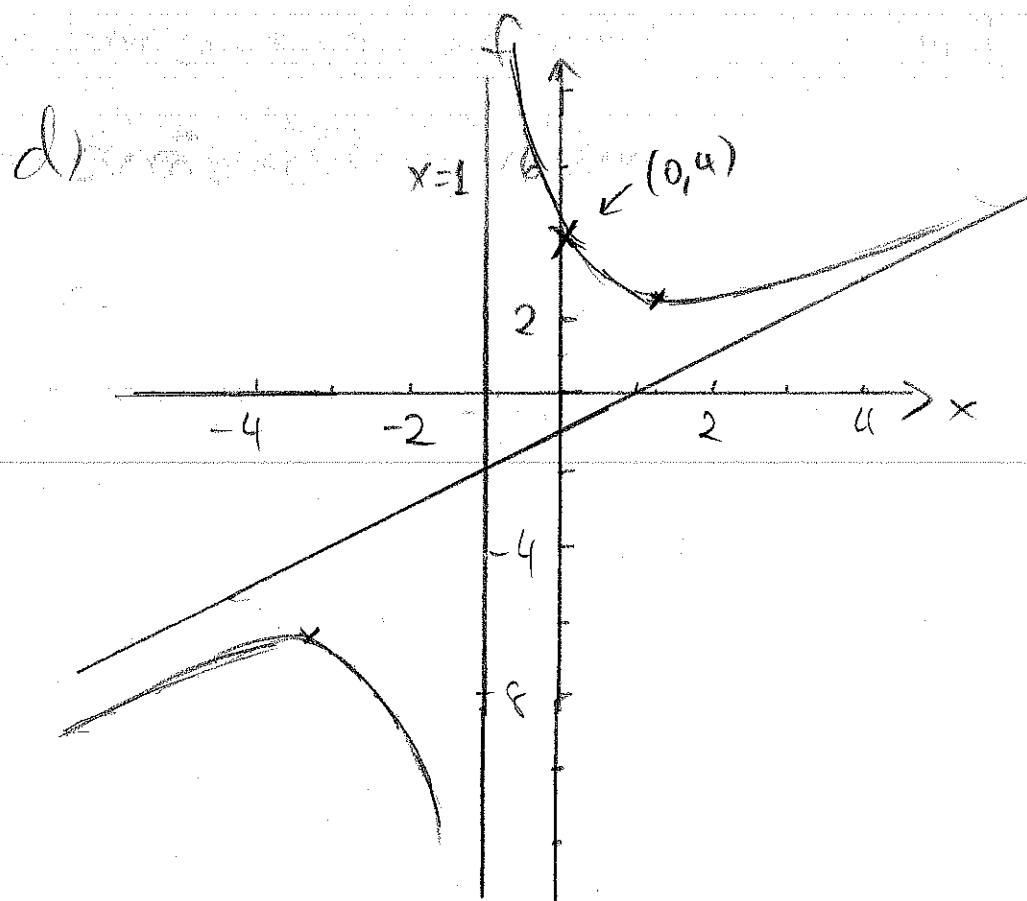
$x = \sqrt{5} - 1 \approx 1.23$: Minimalpt.

$$f(-1 - \sqrt{5}) = \frac{(-1 - \sqrt{5})^2 + 4}{1 + (-1 - \sqrt{5})} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} =$$

$$- \frac{(10 + 2\sqrt{5})\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = - \frac{10\sqrt{5} + 2 \cdot 5}{5} = -(2\sqrt{5} + 2) \approx -6.47$$

$$f(\sqrt{5} - 1) = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2 + 4}{1 + \sqrt{5} - 1} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 2 \approx 2.47$$

[2] Men minimumet er jo større enn maksimumet...?



Monotoni egenskaper

f er deriverbar på $\langle a, b \rangle$

f er voksende på $\langle a, b \rangle$ hvis og
berre hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in \langle a, b \rangle$

avtakende: Same med " $f'(x) \leq 0$ "

Strengt voksende: " $f'(x) > 0$ " for
nesten alle $x \in \langle a, b \rangle$

↑ $f(x)$ kan være 0 for enkelt plet-
i $\langle a, b \rangle$

[?] Kva vil det seie at f er
voksende på $\langle a, b \rangle$?

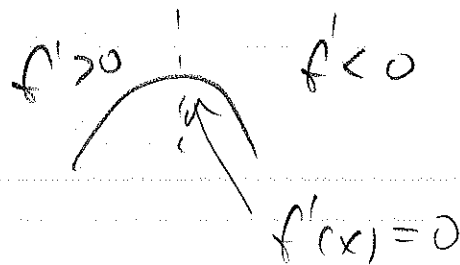
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Avtakende:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

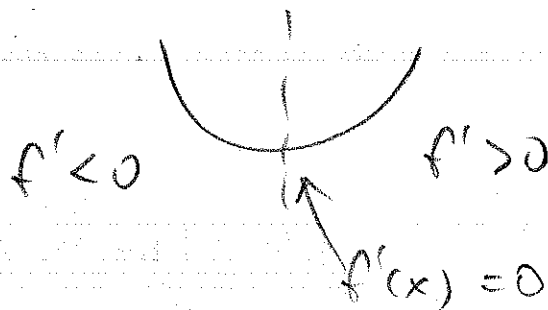
Maksimalpunkt:

$f'(x)$ går fra positiv til negativ



Minimalpunkt:

$f'(x)$ går fra negativ til positiv



Globale maksimalpunkt:

$$f(c) \geq f(x) \text{ for alle } x \in D_f$$

minimalpunkt: " $\leq$ "

Kandidater:

- 1) Pkt. der $f'(x) = 0$
- 2) — " — $f'(x)$ er udefineret
- 3) Randpkt.

Eksempel (5.8.11)

Finn alle globale ekstremalpkt. til
 $f(x) = x - 3x^{2/3}$ med $D_f = [-1, 30]$

Randpkt.:

$$f(-1) = -1 - 3 \cdot (-1)^{2/3} = -1 - 3 \cdot \sqrt[3]{(-1)^2} = -4$$

$$f(30) = 30 - 3 \cdot 30^{2/3} \approx 1.0353$$

$$f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} = 1 - 2x^{-1/3} = \frac{x^{1/3} - 2}{x^{1/3}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{1/3} - 2 = \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$$

Ser også: $f'(x)$ er udef. når $x=0$

$$f(8) = 8 - 3 \cdot 8^{2/3} = 8 - 3 \cdot 4 = -4$$

$$f(0) = 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

Globale minimalpkt: $x = -1$ og $x = 8$

Globalt maksimalpkt: $x = 30$

[?] Om vi hadde hatt $D_f = [-1, 30)$

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) \approx 1.0353 \quad - \quad \text{men } x = 30 \notin D_f$$

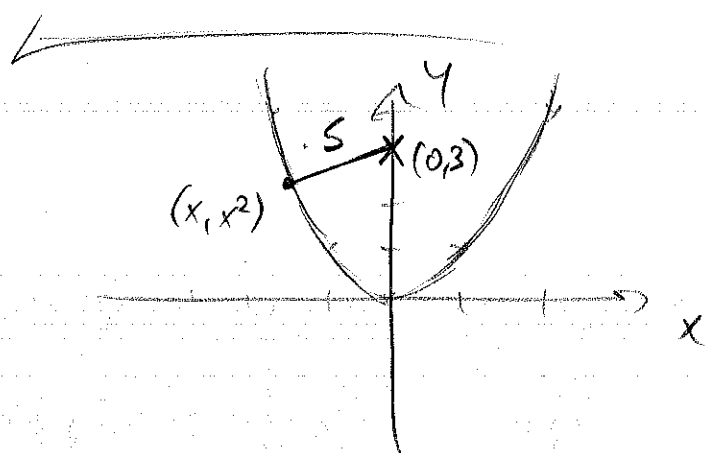
- Ingen globale maksima.

[?] Stemmer dette med ekstremalverdisetu.?

→ Vise plott (s. 210).

Eksempel

Find det punkt på parablen givet ved $y = x^2$ som ligger nærest punktet $(0, 3)$.



$$s^2 = (0-x)^2 + (3-x^2)^2 = x^2 + (x^2-3)^2$$

$$\frac{d}{dx} s^2 = 2x + 2(x^2-3) \cdot 2x = 2x + 4x^3 - 12x =$$

$$4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$$

$$\text{Ser: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow d \rightarrow \infty$$

ser minimal når s^2 er minimal

$$\frac{d}{dx} s^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } 2x^2-5=0$$

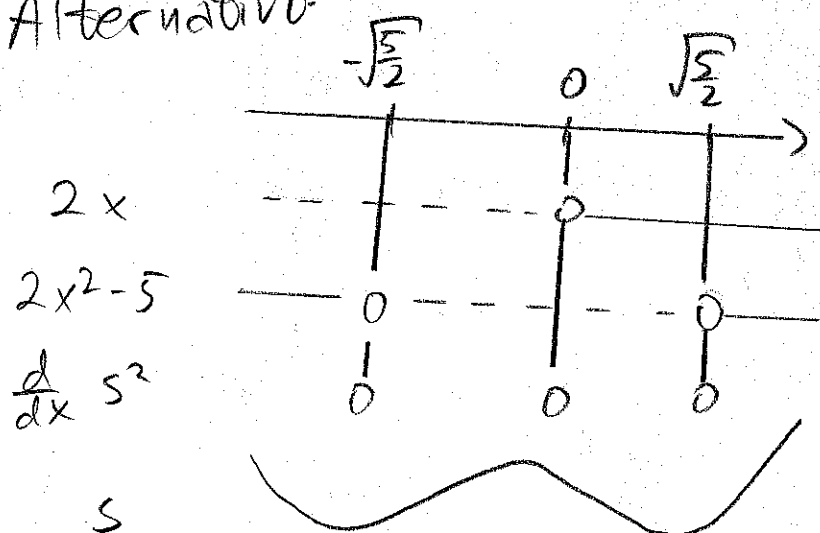
$$2x^2-5=0 \text{ gir } x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$s^2(0) = 3^2, \quad s = 3$$

$$s^2(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}) = \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} < 3^2$$

Minimal s : $\sqrt{\frac{9}{4}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Alternativt:



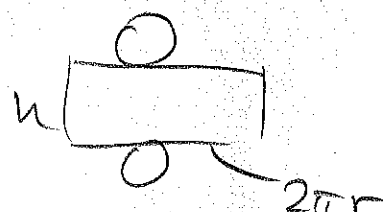
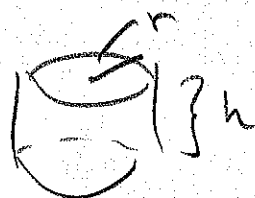
Exempel

Ein Zylinder skal romme 1 l. Ved hva for en radius treng vi minst material?

Volume $V = \pi r^2 h = 1$

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Overflate: $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
 $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} =$
 $2\left(\pi r^2 + \frac{1}{r}\right)$



Ser: $Q(r) \rightarrow \infty$ når $r \rightarrow 0^+$ og når $r \rightarrow \infty$

Minimum: $Q'(r) = 0$

$$Q'(r) = 2(\pi \cdot 2r - r^{-2}) = \frac{2}{r^2}(2\pi r^3 - 1) = 0$$

$$2\pi r^3 - 1 = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0.5419$$

Vi trenger minst material når radiusen er 0.542 dm

→ plottet i MATLAB?

NB! Beate har hørt rett, $h = 2r$ når $Q(r)$ er minimal!

Eksempel

Kva er den største verdien til

funksjonen $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$ med $D_f = [-5, 5]$?

—————

$$f(5) = \frac{\arctan 5}{1+5^2} \approx 0.0528$$

$$f(-5) = -f(5)$$

$$f'(x) = \frac{(\arctan x)'(1+x^2) - \arctan x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - \arctan x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - 2x \arctan x}{(1+x^2)^2}$$

Ser: f deriverbar på hele D_f

Altså: $f'(x) = 0$ når $1 - 2x \arctan x = 0$

eller $g(x) = 0$ med $g(x) = 1 - 2x \arctan x$

Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = \dots = x_n + \frac{1 - 2x_n \arctan x_n}{2 \arctan x_n + \frac{2x_n}{1+x_n^2}}$$

→ MATLAB/kalkulator

→ $x = 0.7654$

Også løsning: $x = -0.7654$ - gir minimum

→ Plote i MATLAB/kalkulator