

Førelsing 15/1

① Beskjedar

- I høve til øblig 3:

Sist torsdag: Oppg. 1

I dag: Oppg. 2 og 5

Neste gang: Oppg. 4 og 6

Veke 6: Oppg. 3

- NB: Mange har gamle øbligar liggande i kassa.

- Leksehjelp (i privat regi):

Tysdagar 16:30-18:00, PI 551

- Interesse for releueøvingar i veke 8?

② Mer om Leibniz-notasjon

Apostroff - skrivemåten har flere ulemper.

T.d. $(5mx^2 + 3\ln x - e^{2x})'$ ↑ liten og lett å glemme

Funk. av flere variable (ikke pensum):

$$f(x, y) = x^2 + \cos y$$

Kva er f' ?

Frå elektronikk: $P = U \cdot I$, $U = \frac{P}{I}$

Kva er variabelen - U eller I ?

Løysinga på problema: Leibniz-notasjon

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

df og dx : "Uendelig små" (infinitesimale)

Fordel: Presiserer hva vi deriverer med
om syn på.

Hvis I er variabel: $\frac{dU}{dI} = \frac{d}{dI} (P \cdot I^{-1}) =$

$$P \cdot (-I^{-2}) = -\frac{P}{I^2}$$

Om P er variabelen:

$$\frac{du}{dP} = \frac{d}{dP} \left(P \cdot \frac{1}{I} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{I}}}$$

Partielt deriverte:

$$f(x, y) = x^2 + \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y$$

Også: $\frac{d}{dx}$ kan oppfattes som en operator, den opererer på det som står til

høgre for seg:

$$\frac{d}{dx} (\sin x^2 + 3 \ln x - e^{2x})$$

Kjernerregelen: $f(u(x))$

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$g(u(v(w(x))))$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Eksempel: $\ln(\sqrt{\sin x^2 + 3} + 2) = \ln u$ med

$$u = \sqrt{v} + 2 = v^{1/2} + 2, \quad v = \sin w + 3, \quad w = x^2$$

$$\frac{d}{dx} \ln \sqrt{\sin x^2 + 3} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} v^{-1/2} \cdot \cos w \cdot 2x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x^2 + 3} + 2} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\sin x^2 + 3}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x$$

I tillegg: - Kan forbausende ofte
handtere dt og dx som om dei
var vanlege tal.

③ Implisitt derivasjon (5.6)

Ikke alltid at ein samanheng
mellom x og y er gitt som
 $y = f(x)$.

- Kan vere gitt implisitt;

$$f(x, y) = g(x, y)$$

- Kurve i planet. Dersom ein x
gir maksimalt ein y , definerer
løyninga også ein funksjon.

Eksempel

$$x^3 + y^3 = 2xy$$

→ Viser Geo Gebra-figur (ert. on the
fly). [?] Er dette ein punkt?

Poeng: Også her kan vi teikne inn

tangenten i et gitt punkt

stigningstallet til denne er (Framleds)

[?] den deriverte, $\frac{dy}{dx}$

→ Same figur - med tangent

Super-ellipse:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^q + \left|\frac{y}{b}\right|^q = 1$$

$q=2$: Ellipse

$q=2$ og $a=b=r$: Sirkel med radius r .

Namn: Piet Hein → Bilde

Sergels torg (Stockholm) → Bilde

Grukes?

Salongbord

Demo: Super Ellipse. m, $q=2, 3, 5, 15$

1.5, 1, 0.7, 0.3

Derivering

Hugs: Vi ser på x som variabelen
og y som en funksjon av x .

$$(y^3)' = 3y^2 \cdot \underline{y'(x)}$$

↑
kjerneregel.

$$\text{Betre: } \frac{d}{dx} y^3 = \frac{d}{dy} (y^3) \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

Eksempel:

$$x^3 + y^3 = 2xy$$

$$\frac{d}{dx} (x^3 + y^3) = \frac{d}{dx} (2xy)$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \left(\frac{dx}{dx} \cdot y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2y + 2x \frac{dy}{dx}$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} = 2y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$$

— Uttrykket for $\frac{dy}{dx}$ er avhengig av
både x og y .

Eksempel

Gitt superellipsen $(\frac{x}{2})^4 + y^4 = 1$,

a) Vis at $(0, 1)$ og $(1, \frac{\sqrt[4]{15}}{2})$ ligg på ellipsen.

b) Finn likninga for tangenten i begge punkta.

$$x=0 \text{ og } y=1:$$

$$(\frac{0}{2})^4 + 1^4 = 1 \quad \text{Ok}$$

$$x=1 \text{ og } y = \frac{\sqrt[4]{15}}{2}:$$

$$(\frac{1}{2})^4 + (\frac{\sqrt[4]{15}}{2})^4 = \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 1 \quad \text{Ok}$$

Begge punkta ligg på kurve.

b) Deriverer:

$$\frac{d}{dx} ((\frac{x}{2})^4 + y^4) = \frac{d}{dx} 1$$

$$4(\frac{x}{2})^3 \cdot \frac{1}{2} + 4y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y^3 \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{16}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{16} \left(\frac{x}{y}\right)^3$$

$$i \quad (0, 1):$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{16} \left(\frac{0}{1}\right)^3 = 0$$

$$i \quad \left(1, \frac{\sqrt[4]{15}}{2}\right):$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{16} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt[4]{15}}{2}}\right)^3 = -\frac{1}{16} \cdot \frac{8}{15^{3/4}} = -\frac{1}{2 \cdot 15^{3/4}} \approx -0.0656$$

Likening for line gjennom (x_0, y_0) ,
stigningstal a :

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$i \quad (0, 1):$$

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0), \quad \underline{y = 1}$$

$$i \quad \left(1, \frac{\sqrt[4]{15}}{2}\right):$$

$$y - \frac{\sqrt[4]{15}}{2} = -\frac{1}{2 \cdot 15^{3/4}} (x - 1)$$

$$y = -\frac{x}{2 \cdot 15^{3/4}} + \frac{1}{2 \cdot 15^{3/4}} + \frac{\sqrt[4]{15}}{2} \approx -0.0656x + 1.0496$$

→ Plot : MATLAB.

④ Kopla færd (5.6)

I stød: x , variabel, y avhengig av x .

No: Både x og y avhengig av tiden t .

Eksempel

En kuleforma ballong blir blåst opp. Når radiusen er 1.5 dm aukar volumet med 0.3 l/s. Kor fort aukar radiusen.

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Her: V og r er fank. av t .

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} (r(t))^3$$

Deriverar:

$$V'(t) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \cdot r'(t)$$

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r^2} = \frac{0.3 \text{ dm}^3/\text{s}}{4\pi \cdot (1.5 \text{ dm})^2} = 0.0106 \text{ dm/s} \approx 0.11 \text{ cm/s}$$

Kjerneregel.

Hvis tid: Oppg. 3, eksamen des. -13.

⑤ L'Hôpital's regel (5.7)

For grenseverdien $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Dersom $f(c) = g(c) = 0$ eller

$|f(x)|$ og $|g(x)| \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow c$, er

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

– gitt at den siste grenseverdien eksisterer eller går mot $\pm\infty$.

NB: • Det kan godt tenkes at

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ er veldefinert uten

at $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ er det.

• Regelen gjelder også for ensidige grenser ($x \rightarrow c^+$) og for $x \rightarrow \pm\infty$.

Eksempel

Bestem disse grenseverdier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+9}$$

$\frac{\sin x}{x}$: Teller og nemner $\rightarrow 0$ når $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Veit: $\ln x \rightarrow -\infty$ når $x \rightarrow 0^+$; vi får

et " $\frac{\infty}{\infty}$ "-uttrykk

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1} \cdot 1}{\frac{1}{x^2-1} \cdot 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{2x(x-1)} \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{2x \cdot 1 + 2(x-1)} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1 + 0} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x - 4} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2}$$

- Nennaren går mot 0 og teljaren går mot 4; uttrykket går mot $\pm\infty$.
Grenseverdien eksisterer ikke.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x} = 1 \quad ?$$

Nei! Teljeren går ikke mot 0!

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9} = \frac{3^2 - 9}{3^2 + 9} = \underline{0}$$

H\ddot{o}pitals regel er ikke "idiotsikter".

Eksempel

Finn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$

- Både teljer og nenner $\rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x}_0$$

Udef.

Men:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = \underline{1}$$

Av og til må vi manipulere uttrykket litt for å kunne bruke regelen.

Eksempel (5.7.10)

Bestem disse grenseverdierne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad \sim \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+1} \right) \quad \sim \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \quad \sim 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - 1 \cdot (x-1)}{(x-1) \ln x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{1 \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6x - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{\sqrt{x^2+6x}} \quad \sim \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

- Kan bruke H\ddot{o}p-regel. Enklare: dele på $\frac{1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x+1) \frac{1}{x}}{(\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x^2+1}) \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\frac{6-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \underline{3}$$

For kontinuerlege funksjoner f :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(u(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} u(x)\right)$$

$e^{u(x)}$ er kont.

Omskriving: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \frac{0}{0}$$

L'Hôp

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Altså: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1 = \underline{e}$

Definisjon av e : $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$$

→ Plotte?