

Foredrag 25/11

① Besked

Relevøring 10:30 den 26/11: P48-P469

Oblig 2 - 2. gang: Frist, på fredag 14:00

Rep.: Frå og med 2/12, same tid,
i P35-PI254.

② Midvejs evaluering

- Går gennem kommentarer.

③ Derivasjon

Definisjon: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Numerisk: $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ eller

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Hvis $f(x)$ er en elementær funksjon:

Derivasjonsregler - 1 -

- Smørbrødsliste over derivasjonsregler for de andre funksjonar.

- Så notat frå 18/11.

Viser ein:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \sinh$$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cosh - 1) + \cos x \sinh}{h} =$$

$$\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}}_{(2) \rightarrow 1}$$

Triks:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1)(\cosh + 1)}{h(\cosh + 1)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 h - 1}{h(\cosh + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sinh^2 h - 1}{h(\cosh + 1)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sinh^2 h}{h(\cosh + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} \cdot \frac{\sinh h}{\cosh + 1}$$

$$= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{\cosh + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{Altså: } (\sin x)' = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

□

④ Litt mer generelle regler

Linearitet: 1) $(c \cdot f(x))' = c f'(x)$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Produktregelen: 2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(Kvotientregelen) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

NB: Ikke $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$

Kjernerregelen: $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

Betre: Leibniz-notasjon:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Læreboka:} \\ (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) \end{array} \right)$$

1) Deriver som om det var u som var variabelen. 2) Multipliser med den deriverte av u .

- Kan trenge fleire kjerner:

$$f(u(v(x))), \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

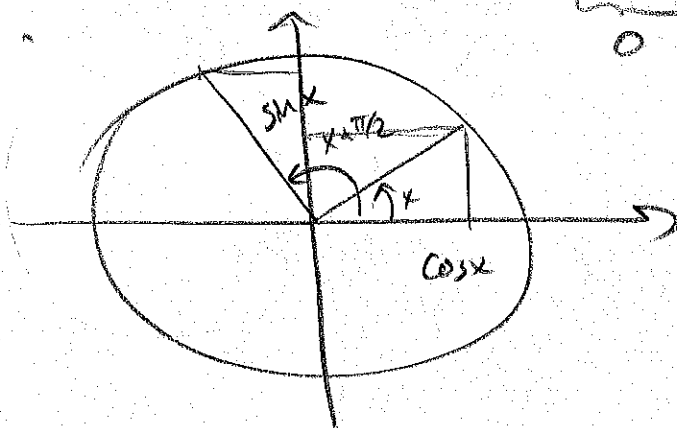
Eksempel

a) Bruk lærereregelen, at $(\sin x)' = \cos x$
og at $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ til å vise
at $(\cos x)' = -\sin x$

b) Bruk produktregelen til å komme
fram til kvotientregelen for derivasjon
(Hint: $f = \frac{u}{v} \Leftrightarrow f \cdot v = u$)

②

$$\begin{aligned} a) (\cos x)' &= (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2})' = \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = \cos x \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - \sin x \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 = -\sin x \quad \square \end{aligned}$$



Regel: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

b) $f = \frac{u}{v} \Leftrightarrow f \cdot v = u$

$$(f \cdot v)' = u' \Leftrightarrow f' \cdot v + f \cdot v' = u'$$

$$f'v = u' - f v' = u' - \frac{u}{v} \cdot v' = u' - \frac{u v'}{v} =$$

$$\frac{u'v}{v} - \frac{u v'}{v} = \frac{u'v - u v'}{v} \quad (\Rightarrow)$$

$$f' = \frac{1}{v} \cdot \frac{u'v - u v'}{v} = \frac{u'v - u v'}{v^2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

□

Exempel

Derivær desse funksjonane:

$$a(x) = x^{7.8} + \sqrt{x} - 8 \sin x$$

$$b(x) = \sqrt{x} \cos x$$

$$c(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos x} + \sin x^2$$

$$d(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$$

①?

$$a'(x) = 7.8 x^{7.8-1} + (x^{1/2})' - 8 \cdot (\sin x)' =$$

$$7.8 x^{6.8} + \frac{1}{2} x^{-1/2} - 8 \cos x =$$

$$7.8 x^{6.8} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8 \cos x$$

Brulear: $(x^r)' = r x^{r-1}$

Lineari'tet

$$b'(x) = (\sqrt{x})' \cos x + \sqrt{x} (\cos x)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \sqrt{x} (-\sin x) =$$

$$\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$$

- Produktregeln

$$c'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x} + \sin x^2 \right)' \stackrel{\text{Lineare Quotient}}{=} \frac{\sqrt{x}' \cos x - \sqrt{x} (\cos x)'}{(\cos x)^2} + (\sin x^2)' \stackrel{\text{Kettenregel}}{=}$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} (-\sin x)}{\cos^2 x} + \cos x^2 \cdot (x^2)' \stackrel{\text{Produkt}}{=}$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} (-\sin x)}{\cos^2 x} + \cos x^2 \cdot (x^2)' \stackrel{\text{Produkt}}{=}$$

$$\frac{2\sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \sqrt{x} \sin x \right)}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 x} + \cos x^2 \cdot 2x =$$

$$\frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x} + 2x \cos x^2$$

$$d(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$$

$$d'(x) \stackrel{\text{Kette}}{=} \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot (1 + \sin^2 x)' \stackrel{\text{Kette}}{=}$$

$$\frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot (0 + 2 \sin x) \cdot (\sin x)' =$$

$$\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x} \stackrel{\text{Produkt}}{=} \frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2 x}$$

Har bruk:

-Kjernerregel to ganger

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Om vi skriv kjernene eksplisitt:

$$\underline{\sin x^2}$$

$$u = x^2$$

$$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$$

$$\underline{d(x) = \ln(1 + \sin^2 x)}$$

$$\text{Først: } u = 1 + \sin^2 x$$

$$d'(x) = (\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$\text{Med } v(x) = \sin x \quad u(x) = 1 + (v(x))^2$$

$$u'(x) = 0 + 2v \cdot v'(x) = 2v \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$d'(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x = \dots$$

-Å skrive u, v eksplisitt: „Støttehjelp“ som det kan være greit å kaste etterkvart.

