

Føreløsing

18/11

① Beskjedar

- Siste ordinære føreløsing i år: 25. nov.
- Legg opp til repetisjonstilbud same tid.
- Oblig 2: Retta innen fredag (høper vi)
Frist for evt. 2. gang: 28 nov.

② Den deriverte:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ eller } \frac{df}{dx}$$

Dersom funksjonen ildre har et navn,

t.d. $\sin x^2 + \sqrt{x}$:

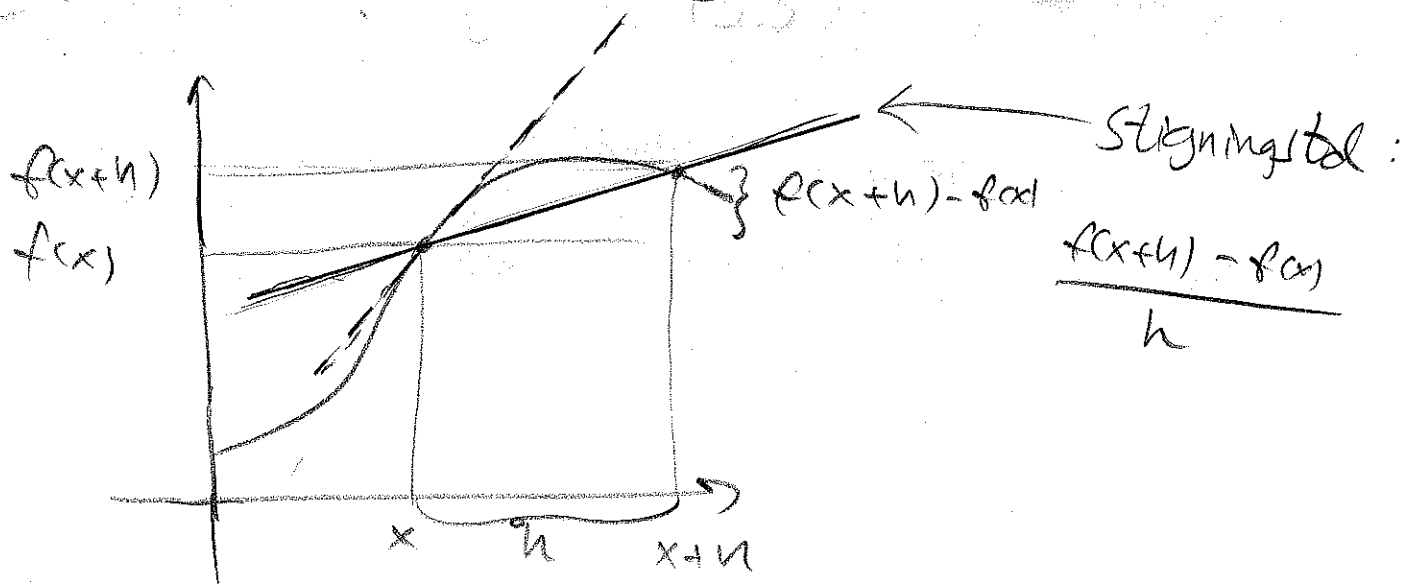
Den deriverte er $(\sin x^2 + \sqrt{x})'$ eller

$$\frac{d}{dx} (\sin x^2 + \sqrt{x})$$

↪ Leibniz-notasjon

Eksempel 2.9 i notat fra 11/11.

③ Lineær tilnærmning (5.3)



$h > 0$: Sekant

$h \rightarrow 0$: Tangent

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ er stigningstallet til tangenten i punktet.

Tangent i pkt. $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- OK tilnærmning til f når x ligger nær a .

Eksempel

Tyngdeakselerasjonen er gitt ved

$$g(x) = g_0 \frac{R^2}{(R+x)^2} \quad \text{der } x \text{ er høyde,}$$

$$g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2, \text{ jordradiusen } R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Om vi går ut fra at g varierer lineært, kan stor feil gjer vi om vi reknar ut tyngdeakselerasjonen for eit fly i høyde $x = 11.0 \text{ km}$ - eller $\frac{1}{5}$ av jordradiusen, $x = \frac{R}{5}$?

$$\begin{aligned} g'(x) &= g_0 R^2 \cdot ((R+x)^{-2})' = g_0 R^2 (-2) \cdot (R+x)^{-3} \cdot (R+x)' \\ &= -\frac{2g_0 R^2}{(R+x)^3} \end{aligned}$$

$$g'(0) = \frac{-2g_0 R^2}{(R+0)^3} = -2 \frac{g_0}{R}$$

$$g(0) = g_0$$

Lineær tilnærming:

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -2 \frac{g_0}{R} x + g_0$$

$$x = 11.0 \text{ km:}$$

$$y = -2 \frac{g_0}{R} \cdot 11.0 \cdot 10^3 + g_0 = g_0 \left(1 - \frac{2 \cdot 11.0 \cdot 10^3}{6.37 \cdot 10^6} \right) =$$

$$= 0.9965 g_0 = 9.76615 \text{ m/s}^2$$

"Fast":

$$g(x) = g_0 \frac{R^2}{(R + 11.0 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = \dots = 9.7762 \text{ m/s}^2$$

$$x = R/5:$$

$$y = g_0 \left(1 - 2 \cdot \frac{R/5}{R} \right) = g_0 \left(1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{5} g_0 = \underline{5.886 \text{ m/s}^2}$$

$$g(R/5) = g_0 \frac{R^2}{(R + R/5)^2} = \frac{25}{36} g_0 = \underline{6.8125 \text{ m/s}^2}$$

④ Newtons metode (5.4)

Om en har et vanskelig, kan en prøve å konstruere et lettere problem som likner og løse dette i stedet.

MATLAB-lelesjon 4: $\sqrt{x} = \cos x$

[?] Korleis løyste vi denne?

– Intervall halveringsmetoden,

[?] Kva var det teoretiske grunnlaget

for denne?

- Skæringssetninga.

Repetitor:

$$f(x) = 0 \text{ der } f(x) = \sqrt{x} - \cos x$$

$$f(0) = -1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0, \quad f \text{ er kont.}$$

Derfor: x har (minst) et nullp. i

pa $[0, \pi/2]$ - ved skæringssetninga.

Skript: halvering.m

Alternativ metode

Erstatter $f(x)$ med lineær tilnærming og løser problemet for dette.

- Antar $x=1$ er en i nærleiken av løsninga

Linearisering:

$$f(1) = \sqrt{1} - \cos 1 \approx 0.4597$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - (-\sin x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \sin 1 \approx 1.341$$

$$y - 0.4597 = 1.341(x - 1)$$

Øøeng: Finn nullpunkt for denne; $y=0$

$$y = 1.341(x-1) + 0.4597$$

$$y = 0$$

$$1.341(x-1) + 0.4597 = 0$$

$$x = 1 - \frac{0.4597}{1.341} = 0.6572$$

- Ganske nære att!

Men: Kun for ikke repeterer med ny x ?

Generelt, vel x_0 som startverdi

$$y = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y=0 \quad \text{giver} \quad 0 = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x - x_0 = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



x_1

Grener:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$\vdots$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Demo: Newton Med Plot.m

Skript: Newton.m

Sammenlikne med Halvering.m

Ser: Newtons metode gir svaret mykje raskere. Men intervallhalveringsmetoden er meir "idiotsikker".

[?] Kva kan gå gale med Newtons metode?

- Ustabilitet dersom $f'(x_n) \approx 0$
- Kan skje at den rett og slett ikkje konvergerar

Eksempel: $x_0 = 5$: itereringa over

Demo: Newton Med Plot Pat.m

Kode teknisk:

While og "minne"

⑤ Derivationsregler (S. 5)

— Mange...

Vi starter med de vigtigste:

$$\left. \begin{aligned} (k \cdot f(x))' &= k \cdot f'(x) \\ (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{[2] Navn?} \\ \rightarrow \underline{\text{Linearitets}} \end{array}$$

— Følger direkte af reglerne for grænseverdier.

Produktreglen:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kjernerreglen

Desom $f(x) = g(u(x))$: $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Betre: Leibniz-notasjon:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Læreboka: $(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

"Eksempel"

Viz korleis kvotientregelen, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,
følgjer av produktregelen

$$\text{La } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad (\Leftrightarrow) \quad f \cdot v = u$$

$$(f \cdot v)' = u' \quad (\Leftrightarrow) \quad f'v + f \cdot v' = u' \quad (\Leftrightarrow)$$

$$f'v + \left(\frac{u}{v}\right) \cdot v' = u' \quad (\Leftrightarrow)$$

$$f'v = u' - \frac{uv'}{v} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$f' = \frac{u' - \frac{uv'}{v}}{v} = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

□

Til sist: Lang smørbrødliste med
derivasjonsreglar for elementære

funksjonar:

$$(x^r)' = r x^{r-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$a^x = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

...

