

Førelæsning

11/11

① Beskriv

- * Oblig 2: Frist fredag
- * Rekræving 12/11: P35-PI259
- * Interesse for repetition utover ordlinder undervisning?

② Viser at $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (jmf. notat 4/11)

③ Eksempel på rasjonal funktion i grense $x \rightarrow \infty$ (jmf. notat 4/11) Eksempel: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \rightarrow$ pløkke $\rightarrow$ udefineret

④ Generelle rekreregler for grense- verdier

Dersom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ og $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$

- 1) $\lim_{x \rightarrow c} (a \cdot f(x)) = a \cdot L$
 - 2) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$
 - 3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$
 - 4) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ dersom $M \neq 0$
- } Linearitbet

5) I tillegg, dersom $f(x)$ er kontinuerleg for $x = M$:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(M)$$

Eksempel:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + e^x \right) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

⑤ Kontinuitet (4.3)

f er kontinuerleg for $x = c$ hvis og berre hvis $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Kan (ofte) tenke slik:

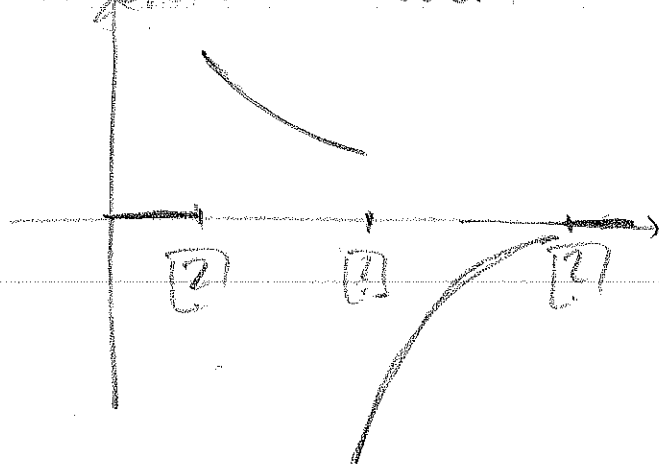
Grafen til f kan berøst gjennom $x = c$ uten å løfte blyanten fra papiret.

Hvis ikke: Diskontinuerleg.

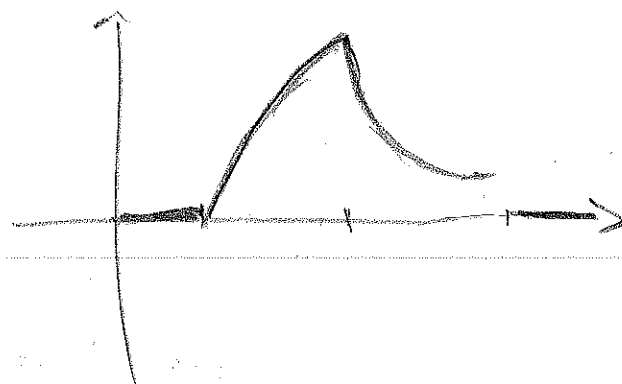
[?] Eksempel på funktioner som har diskontinuitet?

- Porto (vis tabell og plott)
- Varmekapasitet til vann for ulike temperaturer
- Fallskjermhopp:

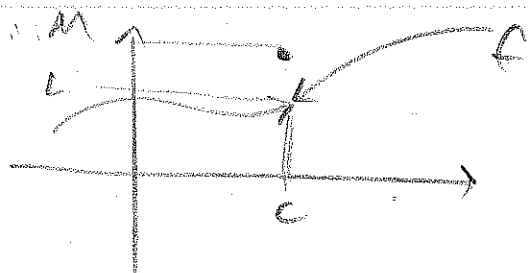
Akselerasjon (nedover)



Fort (nedover)



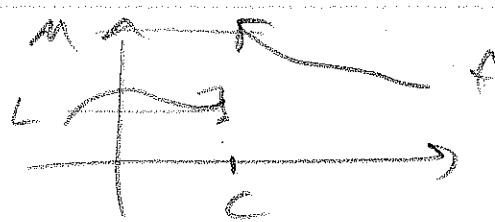
I have til definisjon:



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

$$\text{men } f(c) = M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$$



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = f(c)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = M$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ er udefinert.}$$

Eksempel

Argjör om desse funksjonane er
kontinuerlege for $x=2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2 \\ 6 - x, & x < 2 \end{cases}$$

(Delt forsløtt,
jmf. MATLAB-leesjon 2)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{12 + 2x^2 - 10x}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 2 \\ -2, & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 6 - x = 6 - 2 = 4$$

Altså:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ er ikke definert,}$$

og f er diskontinuerleg for $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 + 2x^2 - 10x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 3x + 2} = \dots =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-1} = 2 \cdot \frac{2-3}{2-1} = -2$$

$$g(2) = -2 = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

g er kontinuerleg for $x=2$.

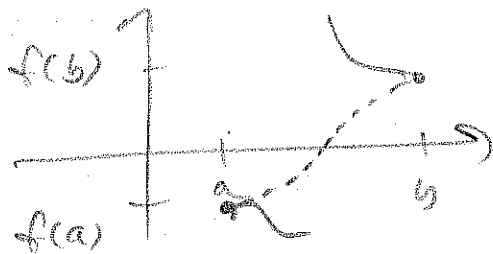
Viktig poeng: Elementære funksjoner er
alltid kontinuerlege (der dei er definert)

⑥ Skærings-sætningen (4.4)

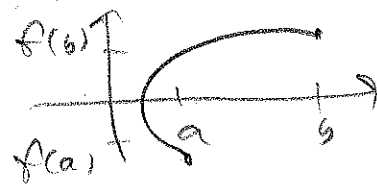
Teorem:

Dersom f er kont. for alle $x \in [a, b]$ og $f(a)$ og $f(b)$ har ulike fortegn, må f ha minst eitt nullpunkt i $[a, b]$

[?] Hvorfor er det avgjerande at f er kont.?



[?] Hvorfor kan vi ikke se "komme oss frå a til b" slike?



→ f skal vere enetydig.

Kortleis kan vi (har vi) utnytte dette?

→ Intervall-holkeringsmetoden.

7) Momentan endring (5.1)

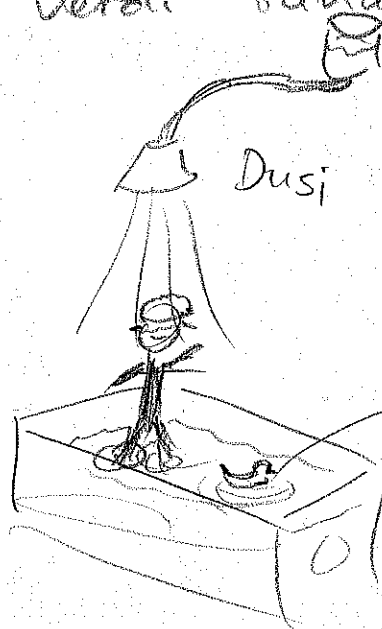
Ei stund framover vil vi vere opptatt av denne grenseverdien:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Motivasjon:

Ar og til er vi meir interessert i korleis ein funksjon endrar seg enn i kva verdi funksjonen har.

Eksempel



V aukar når t aukar.

2) Kva er avgjerande for korleis den i dusjen? V ?

Nei, endringa i V — korleis vatnet renn, korleis V aukar.

Kan tenkje oss at $V(25s) = 5.20l$
 $V(30s) = 6.02l$. Kva fart renn da?
 Vatnet med?

$$\frac{V(30s) - V(25s)}{30s - 25s} = \frac{(6.02 - 5.20)l}{5s} = \frac{0.82}{5} l/s =$$

$$0.164 l/s$$

Jaha, men kva om trykket endrar seg?

$$\begin{array}{l|l} \text{Kanskje } V(26s) = 5.38l & V(25.5s) = 5.293l \\ \text{Fart: } \frac{5.38l - 5.20l}{1s} = 0.18l/s & \text{Fart: } \frac{(5.29 - 5.20)l}{0.5s} = 0.186l/s \end{array}$$

Korleis gir det mening å snakke om
 vass-strømen akkurat når $t = 25s$?

$$\frac{V(25s+5s) - V(25s)}{5s}$$

$$\frac{V(25s+1s) - V(25s)}{1s}$$

$$\frac{V(25s+h) - V(25s)}{h}$$

der h blir så

lite som mogleg, $\underline{h \rightarrow 0}$

Dette er strømen når $t = 25s$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(25s+h) - V(25s)}{h}$$

- Momentan endringsrate - endring i volum i forhold til endring i tid - når tidsendringa blir "uendelig liten".

Dette kallar vi den deriverte.

$$\underline{V'(25s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(25s+h) - V(25s)}{h}}$$

⑧ Å finne den deriverte

- Mange regler for elementære funksjonar. Det kjem vi tilbake til.

- No: Frå "scratch".

Exempel

Finna $f'(a)$ för

a) $f(x) = 2x^3$, $a=2$

b) $f(x) = 7^x$, $a=0$

$$a) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^3 - 2 \cdot 2^3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4+4h+h^2)(2+h) - 16}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\cancel{8}+4h+\cancel{8h}+4h^2+2h^2+h^3)-16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h+12h^2+h^3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (24+12h+h^2) = \underline{24}$$

$$b) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7^{0+h} - 7^0}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{7^h - 1}{h}$$

-Iklare så straight forward

→ MATLAB

Skript: FinnDeriv.m , FinnDerivMedPlott.m

[2] For en endelig (altså ikke uendelig liten) h , børles kan vi lett finne et bedre estimat for $f'(0)$ enn $f'(0) \approx \frac{7^h - 1}{h}$?

$$\rightarrow \text{Slik: } f'(0) \approx \frac{7^h - 7^{-h}}{2h} \quad \left(= \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} \right)$$

- Midtpunktsformelen for numeriske derivasjon (jmf. MATLAB-leksjon 6 og oppg. 3 i oblig 2).

$$\text{Fasit: } f'(x) = 7^x \cdot \ln 7$$

$$f'(0) = 7^0 \ln 7 = \ln 7$$