

Foredlesing 4/11

① Beskjeder

Relevøring 5/11 kl. 10:30: P32-N020.113

Oblig 2 ute

(Noko av det har vi ikkje repetert enda)

② Oblig 2, oppg. 3: "Copy / paste"

Eller: `load(' <filnavn>')`

→ Lesjon 6 i MATLAB

③ Fortsæt med elementære funktioner

Polynom: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

n -te grad.

Kvadratsætningene: 1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$2) (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$3) (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

- Konjugatsætninge.

Eksempel

Løys likninga: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 - 5x$ - "nesten" kvadrat: $x^2 - 5x = (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2$

Altså: $x^2 - 5x + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 6 = 0$

$$(x - \frac{5}{2})^2 + 6 - \frac{25}{4} = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{24-25}{4} = 0$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{eller} \quad x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

Prøv s/ølv: Løys $ax^2+bx+c=0$ på denne måten og kom fram til abc-formelen.

Når $x^2-5x+6=0$ for $x=2$ og for $x=3$:

$(x-2)$ og $(x-3)$ er faktorer;

$$x^2-5x+6 = 1 \cdot (x-2)(x-3)$$

Generelt: Dersom $ax^2+bx+c=0$ for $x=x_1$ og $x=x_2$:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Dersom polynomet $P_n(x)$ har $P_n(x_0)=0$:

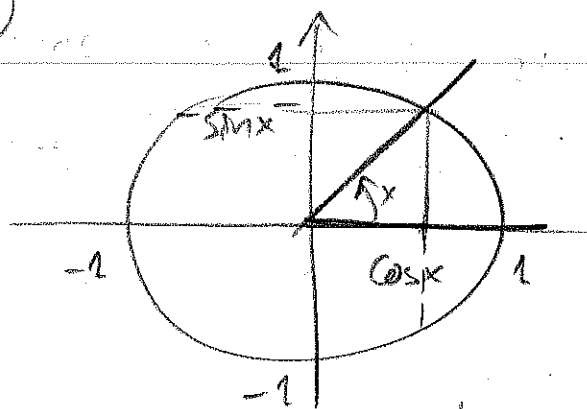
$x-x_0$ er faktor i P_n ; polynomdivisjonen

$P_n : (x-x_0)$ skal gå opp.

Trigonometriske funks.

Einings sirkelen:

[Enhetssirk.]



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Ser: $\sin x$ og $\cos x$ gjentar seg s/ølv
leiar gong x passerer 2π

Også: Dersom $\sin x = a$ er også $\sin(\pi-x) = a$,
dersom $\cos x = a$, er også $\cos -x = a$

Eksempel

Find x når $\sin x = 0.7$

Kalkulator: $\arcsin 0.7 \approx 0.775$

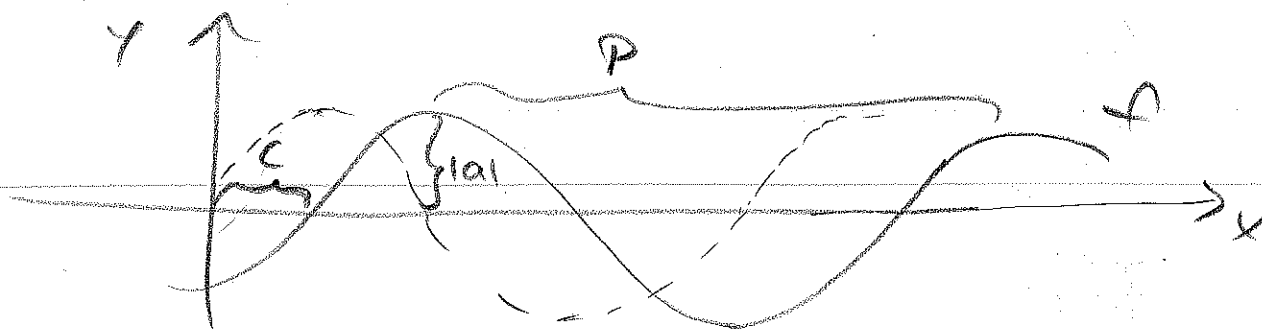
[?] så $x = 0.775$?

$$x = 0.775 + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \underbrace{\pi - 0.775}_{2.367} + n \cdot 2\pi$$

der n er et heltal ($n \in \mathbb{Z}$).

Altså: uendelig mange løsninger. To løsninger i $[0, 2\pi)$.

Grafisk:



$$f(x) = a \sin(k(x-c))$$

$$k = \frac{2\pi}{P}, \quad \text{frekvens: } f = \frac{1}{P}, \quad k = 2\pi f$$

$|a|$: Amplitude

c : Afstand fra y -akse til (første) nullpunkt.

Stiplid: $a \cos(k(x-c))$

[2] Er $\sin x$ injektiv?

→ Nei.

Korleis kan vi gjøre $\sin x$ injektiv?

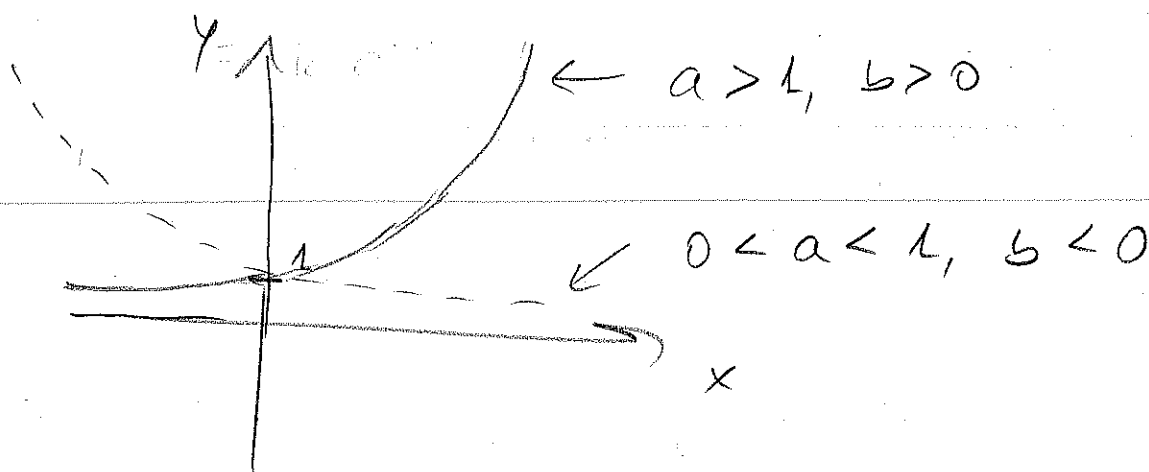
→ Ved å avgrense x til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Då har $\sin x$ invers-funksjonen
 $\arcsin x$ (" $\sin^{-1} x$ ").

For $\cos x$ med $x \in [0, \pi]$: $\arccos x$.

Ekspontensial-funksjon

$$f(x) = k \cdot a^x = k e^{bx}$$



Eksempel: Bakteriiekultur doble hver 30 min:

$$B(t) = B_0 \cdot 2^{t/30}$$

Verditap 10% per år på bil:

$$V(t) = 350\,000 \cdot 0.9^t$$

Startverdi

[?] Er $f(x)$ injektiv?

→ Ja.

[?] Hva er inversfunksjonen til e^x ?

→ $\ln x$

... og inversfunksjonen til 10^x ?

→ $\lg x$

... og a^x ?

→ $\log_a x$

Med $f(x) = e^x$: $f^{-1}(x) = \ln x$

$$f(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \ln e^x = x$$

(Dette definerer $\ln$ -funksjonen)

Potens-reglar:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^{-p} = \frac{1}{a^p}, a^0 = 1)$$

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

Logaritme-reglar

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

Ikke $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$!

$$(\ln 1 = 0)$$

$$-6- \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

Definisjon

✓ grenseverdien til f når x går mot c .

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{dersom}$$

For kva som helst $\varepsilon > 0$ vil vi kunne finne ein δ som er slik at $|f(x) - L| < \varepsilon$ for alle x som er slik at $0 < |x - c| < \delta$.

I "prosa": $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ når vi kan tvinge $f(x)$ til å vere så nær L vi vil ved å kreve at x er tilstrekkeleg nær c (men ikkje like c).

Frauspek: Dersom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$:

[?] f er kontinuerleg for $x = c$.

(Kjem tilbake til dette.)

Så korleis relander vi ut grenseverdier?

Dersom $f(x)$ er kont. for $x = c$,

er det lett.

Eksempel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = \underline{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\underline{\frac{1}{4}}$$

Brøk-uttrykk

Går nevneren mot 0 men ikke telleren?
Da er grenseverdien udefinert

Eksempel

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{(x+2)^2}$$

$$x-3 \rightarrow -5 \quad \text{og} \quad x+2 \rightarrow 0 \quad \text{når} \quad x \rightarrow -2$$

$\frac{x-3}{(x+2)^2} \rightarrow -\infty$, grenseverdien er udefinert,
uttrykket divergerer

Litt "sloppy": $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{(x+2)^2} = -\infty$

Dersom både teller og nevner går
mot null: Ikke så opplyst.

Eksempel

Bestem disse grænseværdier - om de eksisterer

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

a) 2. kvadratsætning: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

3. — " — " : $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

$$\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25} = \frac{(x - 5)^2}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{x - 5}{x + 5} \quad \text{for}$$

alle x udenom 5.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25} \xrightarrow{x \neq 5} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x + 5} \xrightarrow{\text{kont.}} \frac{5 - 5}{5 + 5} = 0$$

b) To teknikker: 1) Bruges konjugatsetning til at udvide nævneren.

2) Faktorisere, i nævner til $\sqrt{x}$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x} + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = \underline{2\sqrt{2}}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-2^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x} + \sqrt{2}) = \underline{2\sqrt{2}}$$

- Kan også la x gå mot $\pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ betyr at vi kan få $f(x)$ til å være så nær L vi vil ved å gjøre x stor nok.

Eksempel

Bestem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^5 - \pi x + \sqrt{2}}{2x^7 + 2}$

Triks: Deler alle ledd i teller på den høyeste x -potensen i nevneren:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^5 - \pi x + \sqrt{2}}{2x^7 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x^5 - \pi x + \sqrt{2}) : x^7}{(2x^7 + 2) : x^7} =$$

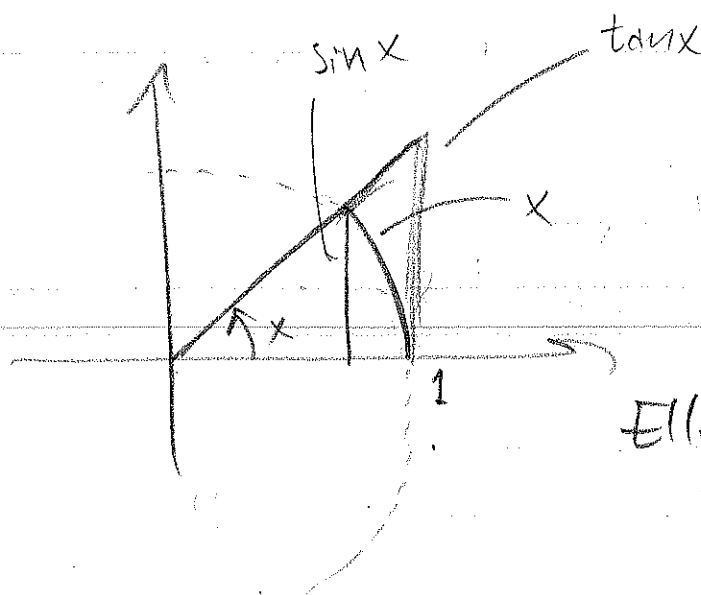
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} - \pi \frac{1}{x^6} + \frac{\sqrt{2}}{x^7}}{2 + \frac{2}{x^7}} = \frac{1 + 0 - \pi \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0}{2 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

To spesielle grenseverdier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{og } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Vi viser den fyrste:



Ser:

$$x > \sin x \quad \text{og}$$

$$x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{Eller: } \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{og}$$

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Meir leompati:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Men: $\cos x \rightarrow 1$ når $x \rightarrow 0$.

Siden $\frac{\sin x}{x}$ ligg mellom, må også

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{når } x \rightarrow 0$$

[?] Mangel i "beniset"?

→ Vi har gått ut fra at $x > 0$,
vi har nåt at

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

↑
Einsidig grense.

- Må gjøre tilsvarende resonnement for $x < 0$ for
å komme i mål.

Eksempel

Vis at $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{5}{x^2} = 5$

$$x^2 \sin \frac{5}{x^2} = \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 5 \frac{\sin \frac{5}{x^2}}{\frac{5}{x^2}}$$

Ny variabel: $t = \frac{5}{x^2}$

$t \rightarrow 0^+$ når $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{5}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 5 \frac{\sin t}{t} = 5 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 5 \cdot 1 = 5$$