

Foredlesing 21/10

① Beskjedar

- Oblig: Delt ut - hugs 2 hent!

NB: Frist til fredag for ikke godkjend.

- Litt om obligen:

Notasjon: „ $\sim$ “ vs. „ $=$ “ (ikke $\Rightarrow$)

Korleis bruke og forklare MATLAB

② Eksempel

For $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & \pi & 8 \\ 0 & -3 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

reken ut $\det A$ og $\det B$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 =$$

$$-4 \cdot (-2 - 3) - 3 \cdot (-3 - 2) = 20 + 15 = \underline{35}$$

Technik: Kofaktor-ekspansion. (langs række 2)

$$\text{Kofaktor: } C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

$$\text{Her: } C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - (9 - 4) = -5$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & \pi & 8 \\ 0 & -3 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +5 \begin{vmatrix} -3 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 2 = 5 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 2 = \underline{30}$$

Moral: For en triangulær matrice er determinanten produktet af diagonal-elementer.

- Gælder også nedre triangulære matricer.

$$\text{Eksempel: } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot (-2)$$

[?] Kva er $\det I_n$?

$$\rightarrow 1^n = 1$$

$$[?] \text{ Kva er } \begin{vmatrix} 4 & \pi & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} ? \rightarrow 0$$

I praksis: Brukar rekeoperasjonar for å reke determinantar - eller ein kombinasjon av rekeop. og køfektor-eksponisjon.

③ Determinantar og rekeoperasjon (3.2)

Har sett: Om vi kan gjere matrisa triangulær, blir det lett.

Brukar følgende:

1) Når vi legg eit multiplum av ei reke til ei anna, blir determinanten til matrisa det same.

2) Når to reker byter plass, endrar determinanten forteken.

3) Når vi gagnar ei reke med k , blir også determinanten ganga med k .

Eksempel

Reken ut disse determinanter

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Frå før: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 35$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (-1 - 6) - 2 \cdot (-10 - 4) + 30 - 2 = -21 + 28 + 28 = \underline{35}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$4 \cdot (-2 - 3) + 3 \cdot (-3 - 2) = -20 - 15 = \underline{-35}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 =$$

$$4 \cdot (-4 - 6) - 3 \cdot (-6 - 4) = 40 + 30 = \underline{70} = 2 \cdot 35$$

Poeng:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Rekn ut

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Kofaktorekspansjon: Rekke 2 best.

Alternativt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & -14 & -4 & -16 \\ 0 & 22 & 15 & 23 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \end{matrix} =$$

NB!

$$- \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -65 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{vmatrix} \xleftarrow{(-1)} = +10 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -65 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \searrow \\ \swarrow \searrow \end{matrix} =$$

$$-10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{vmatrix} = -10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-37) = \underline{370}$$

(4) Diverse resultat (3.2 / 3.3) ↙ Ikke pensum

Viktigast: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertibel

"Ben's"

A invertibel $\Leftrightarrow A \sim I$, $\det I = 1$

Merk: $\det A \neq \det I$, men ingen av reelle operasjoner kan endre determinanten til 0 (endrer forteken eller ganger med $k \neq 0$).

A ikke invertibel $\Leftrightarrow A$ kan ikke rekkereduserast til I ; på trappform har vi minst en 0-rekke. Derfor er

determinanten til den redukserte
matrise 0. Derfor er også $\det A = 0$;
ingen rekkeroperasjoner kan endre
determinanten fra ikke null til null.

□

Ny regel: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Eksempel

Brak regelen over til å vise at
 $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ (gitt at A er invertibel)

Vert: $A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow$

$$\det(A^{-1}A) = \det I \Leftrightarrow$$

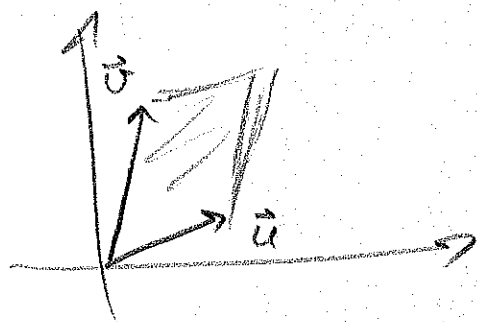
$$\det A^{-1} \cdot \det A = 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \quad \square$$

Gjeld også: $\det A = \det A^T$

→ Kan bruke søyleoperasjoner når vi
reker ut determinanter

Areal, volum og determinant

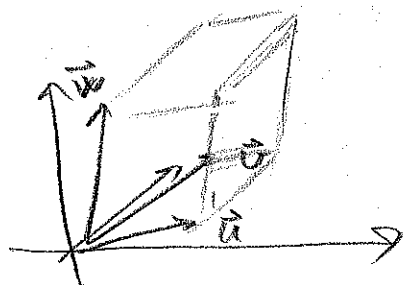


Med $A = [\vec{u} \mid \vec{v}]$

areal av parallelogram:

$$|\det A|$$

absolutt-verdi



Volum:

$$|\det [\vec{u} \mid \vec{v} \mid \vec{w}]|$$

Cramers regel (ikke pensum)

Dersom $\det A \neq 0$:

$A\vec{x} = \vec{b}$ med $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ har løysinga gitt

ved
$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$$
 der

$A_i(\vec{b})$ matrisa vi får ved å byte ut søyle i i A med $\vec{b}$.

Eksempel

Finne $\vec{x}$ med $A\vec{x} = \vec{b}$ der $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

$$\det A_1(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\det A_2(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-5}{2}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Eller:

$$[A|\vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\vec{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/2 \end{bmatrix}}$$

- Sjelden vi sparer tid på å bruke
Cramers regel.

- Gir formel for invers-matriser.

Men: Røttereduksjon er raskere.

Litt om logiske symbol og mengder

(kap. 3 i ny bok)

Relasjonssymbol:

- $=$ - "er lik"
- $\sim$ - "er rellekvivalent med"
- $\rightarrow$ - "gir med" (litt varierende)
- $>, \geq$ - "er større enn (eller like)"
- $<, \leq$ - "er mindre —"
- $\Rightarrow$ - "medfører at", "impliserer"
- $\Leftarrow$ - "same, men motsett veg"
- $\Leftrightarrow$ - "er ekvivalent med at"

Tips: Les dei akkurat som dei står

Eksempel: $5 - 2 (=) 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \downarrow (\sim) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow x = \frac{3+1}{2} = 2$$

Man også: $x = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 3$

Ekvivalens: $2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$

- ulike måter å seie det same på.

$$[?] \quad \sqrt{x-2} = x+2 \Rightarrow x-2 = (x+2)^2$$

NB: Høgre-implikasjon gjeld ikkje
(jmf. $x^2 = 4$? $x = 2$)

$$x \geq y \Leftrightarrow -x [?] -y$$

$$\rightarrow \leq$$

$$x < -2 \text{ og } x \geq -3 \Leftrightarrow x \in [-3, -2)$$

↑

Intervall

$[a, b]$: Mengde av alle tal (på tallinje) fra og med a til og med b .

(a, b) : Det samme, men a og b er ikke med.

[2] Kor mange element har desse mengdene:

$[2, 3]$
 $(2, 3)$ } Uendelig mange, tallinje er
kontinuerlig

$\{2, 3\}$: To element - 2 og 3

↑
Listeform

"Slik at" - skrivemåten:

$$A = \{x \mid x < -2 \text{ og } x \geq -3\} = [?]$$

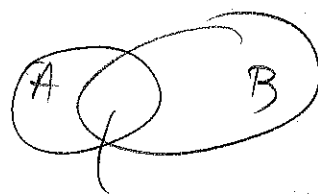
$$[-3, 2) \uparrow$$

Les: A er (like) mengde av alle x som er slik at x er mindre enn -2 og x er større enn eller like -3.

Snitt og union:

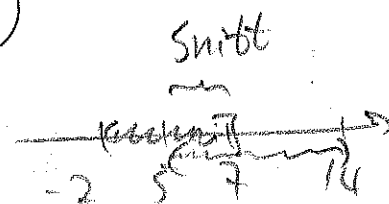
$A \cap B$: Dei elementa som

ligg i begge



$A \cap B$

$$(-2, 7] \cap (5, 14) = (5, 7]$$



$A \cup B$: Dei elementa som ligg i (minst) ein av mengdene A og B.

$$(-2, 2) \cup \{2, 2\} = [2, 2]$$

$$[-5, 0) \cup (0, 5] = [-5, 5] \setminus \{0\}$$

↑
"utanom"