

Føreløsing

14/10 -14

① Beskjedar:

- Læresok; minne om endring.
- Pensumliste på Fronter (?)
- Håper å levere ut oblig på fredag

Det som evt. ikke får
godkjend: Frist til fredag 24/10

② Litt repetisjon: A^{-1} oppbygger

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ for en $n \times n$ -
matrise A . For en slik A :

A er invertibel.

Metode:
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2 \times 2)$$

generelt: $[A | I_n] \sim \dots \sim [I_n | A^{-1}]$

Dersom A ikke let seg redusere til I_n : A ikke invertibel.

③ Eksempel s. 12, 13 + r 7/10.
-Kontrollere i MATLAB.

④ Eksempel

Er disse matrisene invertible?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

↖ det A

$$3 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 24 - 14 = 10 \neq 0$$

A er invertibel.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-Ikke leddet tal i søyle 3.

B er ikke rekke-ekvivalent med I_3

Og dermed ikke inverteibel.

A er ikke kvadratisk og dermed ikke inverteibel.

⑤ Eksempel

a) Finn X når $(X - 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Gitt at P er inverteibel, finn X når $P^{-1}XP = D$. (Jmf. oppg. 2.2:8.)

$$(X - 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(X - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 14 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}) \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 14 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 14 & -12 \\ 11 & 10 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}}}$$

$$b) \quad P^{-1} \bar{X} P = D$$

$$P \cdot P^{-1} \bar{X} P = P \cdot D$$

$$I \bar{X} P = P D$$

$$\bar{X} P = P D$$

$$\bar{X} P P^{-1} = P D P^{-1}$$

$$\bar{X} I = P D P^{-1}$$

$$\underline{\bar{X} = P D P^{-1}}$$

Digression

$$[?] \text{ Kva er } \bar{X}^2?$$

$$\rightarrow \bar{X}^2 = P D \underbrace{P^{-1} \cdot P}_I D P^{-1} = P D I D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$$

$$\text{Generelt: } \bar{X}^n = P D^n P^{-1}$$

$$[?] \text{ Om } D \text{ er diagonal, } D = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots \\ 0 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

kvifor er dette ein fordel?

$\rightarrow$ Fordi D^n er lett å rekne ut,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ gir } D^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix}$$

(imp. MATLAB-leksjon 8, oppg. 4 g.)

Diagonalisering (pensum i MAT. 2000)

- Skrive A som PDP^{-1} der
 D er diagonal, $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$

Dersom $P = [\vec{p}_1 | \vec{p}_2 | \dots | \vec{p}_n]$:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i^T$$

-Ikke alle matriser kan skrives
slik. Men alle matriser kan
skrives slik:

$$A = \sum_{i=1}^n p_i \vec{u}_i \cdot \vec{v}_i^T = p_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1^T + p_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2^T + \dots$$

[?] Kva om vi "kuttar" summen?

→ Klare-eksempel i MATLAB

Td

X : 200×320 , $200 \cdot 320 = 64\,000$ (pikslar)

$$X = \sum_{i=1}^{200} p_i \vec{u}_i \cdot \vec{v}_i^T, \quad \begin{array}{l} \vec{u}_i: 200 \text{ element} \\ \vec{v}_i: 320 \text{ " "} \end{array}$$

$p_i \vec{u}_i \cdot \vec{v}_i^T$: $1 + 200 + 320 = 521$ element per i

⑥ Ein bråte med ekvivalensar (2.3)

Dersom A er ei $n \times n$ -matrise, er
følgande påstandar ekvivalente.

②

- a) A kan reduserast til trappesform med
leiande tal i kvar søyle
- b) Likningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig
løysing for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
- c) Likninga $A\vec{x} = \vec{0}$ har berre den
trivielle løysinga ($\vec{x} = \vec{0}$)
- d) Søylen i A er lineært uavhengige.
- e) A kan rekke-reduserast til I_n .
- f) A er invertibel.
- g) $\det A \neq 0$

← ~~$N_{\vec{b}} \vec{b}$~~

Hvis tid:

Kva med rektangulære matriser?

A : $m \times n$ -matrise ($m \neq n$)

- a) A har leiande tal $\Rightarrow$ kvar søyle
- b) Søylerne i A er lin. uavh.
- c) Likninga $A\vec{x} = \vec{0}$ har berre den triviale løysinga

$A\vec{x} = \vec{b}$: Aldri uendelig mange løysingar

Om A har leiande tal $\Rightarrow$ kvar søyle:

$A\vec{x} = \vec{b}$ aldri inkonsistent.

Determinanter (3.1)

- Det siste lineær algebra-omgrepet vi skal innføre i dette kurset.

$\det A$ - determinanten til ei

kvadratisk matrise. - Er et tal.

- Her ett sett kan for 2×2 -matriser:

Dersom $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, er

$$\det A = ad - bc.$$

Definisjon (rekursiv):

For ei 1×1 -matrise, $A = [a]$, er $\det A = a$.

For ei $n \times n$ -matrise ($n \geq 2$),

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} :$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

der A_{1i} er matrise da for når

du får enar række 1 og søyle i
i A. Mer kompakt: $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$

Eksempel: Bestem $\det A$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \det A_{11} = 4 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) = -2$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \det A_{12} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 = 0$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \det A_{13} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 = -4$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} =$$

$$1 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = \underline{\underline{-2}}$$

Ser: Bruker determinanter for 2×2 -
matriser for å finne determinanten
for en 3×3 -matrise.

Eksempel

Brug definitionen til at vise at

$$\det A = ad - bc \quad \text{når} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det A = a \cdot \det A_{11} - b \cdot \det A_{12}$$

$$A_{11} = [d], \quad \det A_{11} = d$$

$$\det A_{12} = c$$

$$\det A = a \cdot d - b \cdot c$$

□

Teorem (som vi ikke skal bruge):

- Vi kan regne ud determinanten langs en række eller søjle som helst.

Med samme A som i definitionen:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{række } i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{søjle } j)$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \end{bmatrix}$$

- Sjekk at man får samme eksempel.

Rekke 2:

$$\begin{aligned}\det A &= -2 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \cdot (5 \cdot 0 - 0 \cdot (-2)) + 4 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 \\ &= \underline{-2}\end{aligned}$$

Søyle 3:

$$\begin{aligned}\det A &= +0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 = \underline{-2}\end{aligned}$$

- Alle val gir samme svar - men
noke val gir også mindre arbeid.

- Velg den rekke / søyle som har
fleest 0-er!

Litt mer kompakt skrivemåte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix} \text{ betyr } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 8 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Eksempel

$$\text{Bestem } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 13 & \pi \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 13 & \pi \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 13 & \pi \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 8 \cdot (-1) \cdot |7| = \underline{1 \cdot 8 \cdot (-1) \cdot 7} \quad (= -56)$$

Poeng: For ei triangulær matrise er determinanten like produktet av tall langs diagonalen.

Triangulær: Berre 0-er over/under diagonalen.