

Føreløsing 7/10

① Beskjeder

- Oblig 1 - først fredag
• Hugs å bruke framsiden!

- Relne øving 8/10 kl. 10:30: PI-649

- MATLAB-kurs: Slutt; inga forelesing
på torsdag

- Om lærebok

- I kap. 2.2: Dropp "Elementary Matrices"

② Eksempel

Gi oss $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Rekn ut $A\vec{x}$, $\vec{x}^T A$, $\vec{x}^T \vec{y}$, $\vec{x} \vec{y}^T$ og $\vec{x}^T A \vec{y}$

$\vec{x}$: Kan ses på det som ei 3×1 -matrise

$\vec{x}^T = [1 \ 2 \ 3]$ - rekkevektor, 1×3 -matrise

$$A \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+6 \\ -2+2+3 \\ 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{— søylevektor}$$

$$\vec{x}^T A = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

$$[3 -4 +12 \quad 2 -9 \quad 2 +2] = \underline{[11 \ -7 \ 4]} \quad \text{— rekkevektor}$$

$$\vec{x}^T \vec{y} = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [2+0+3] = 5 \quad \text{— tal}$$

(1x1-matr.)

$$\vec{x} \vec{y}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

— matrise

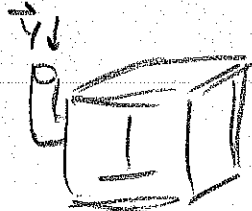
③ Inverse transformasjoner

Transformasjon: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$



$\vec{y} = T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$

Kan vi bruke "maskine" motsatt veg?

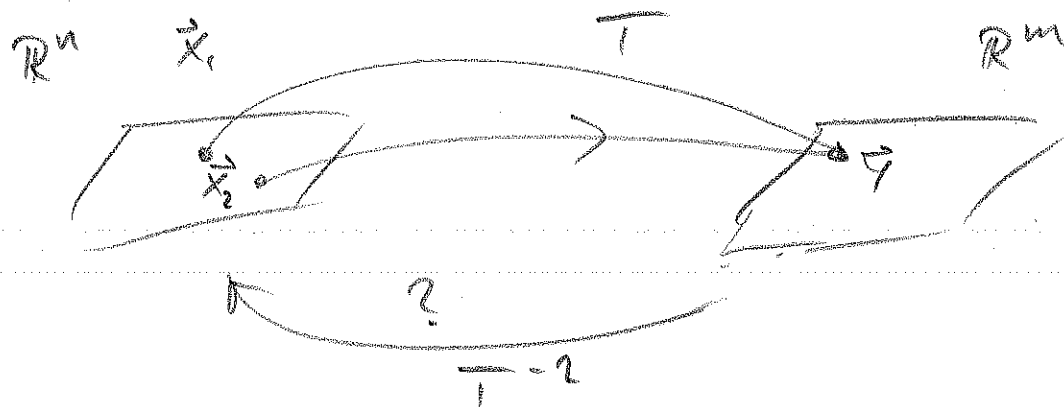


$$\vec{x} = T^{-1}(\vec{y})$$

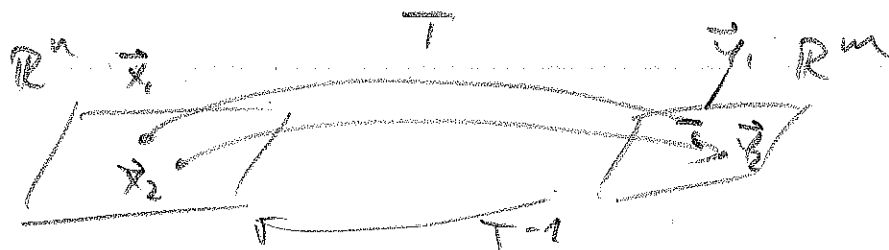
Ja, av og til

Når?

Anna bilde



Nei, må være én-éindydig

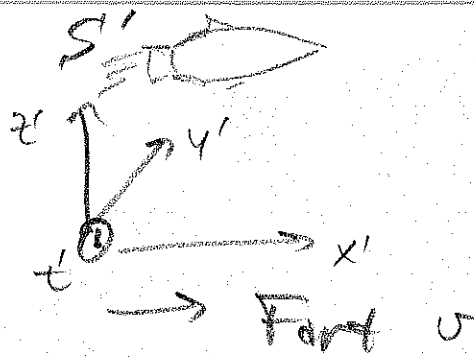
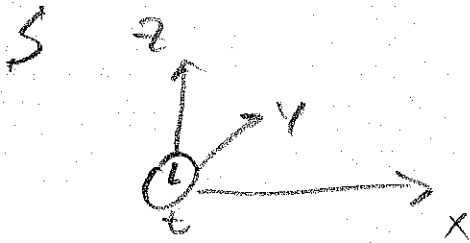


I tillegg: Frå- og tilromma må være like; $n=m$

Eksempel: Lorentz-transformasjonen

[?] Kva "rom" lever vi i ?
 $\mathbb{R}^3$ (for en måte)

[?] Om vi tenker oss tide som den 4. dimensjonen: $\mathbb{R}^4$



$$\begin{aligned} ct' &= \gamma (ct - \frac{v}{c}x) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

← brukar ct , ikke t ,
for 4-komponenter slik
at alle får same eining

$$\text{der } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

c : Lysfarten, $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

→ Diskutere tid = litt

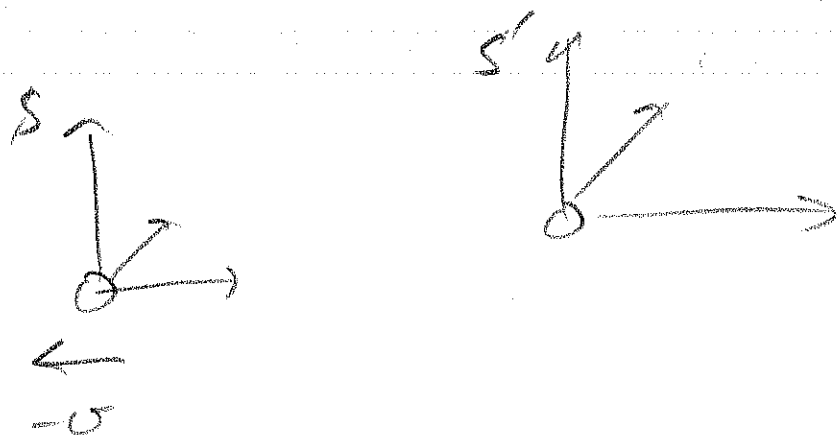
[?] Kva blir standardmatrisa til transformasjonen?

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma (ct - \frac{v}{c}x) \\ \gamma (x - \frac{v}{c}ct) \\ y \\ z \end{bmatrix} = ct \begin{bmatrix} \gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -\frac{v}{c}\gamma \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Der er ikke noen universelt system;
 S' er like "fundamental" som S .

Difor: Kan gå fra S' til S ved å endre forteiken på v . Hvis S' har farten v i høve [forhold] til S , vil S ha farten $-v$ i høve til S'



[?] Kva blir då standardmatrise til den inverse transformasjonen?

- Byter v med $-v$

γ blir til $\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{-v}{c})^2}}$

-uendra.

Matrise blir

$$\begin{bmatrix} \gamma & \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[?] Kva blir produktet av standardmatrisene?

För vi reknar ut det som helst:
 Kva bor det bli?
 $\rightarrow I_4$

$$\begin{bmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma^2 & -\frac{v}{c}\gamma^2 + \frac{v}{c}\gamma^2 & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma^2 - \frac{v}{c}\gamma^2 & -\left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma^2 + \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$$\gamma^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma^2 = \gamma^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1$$

Seer: Matrisene er inversmatrisene till
 kvarandre

4 Inverse matriser (2.2)

Har sett addisjon og multiplikasjon med matriser.

Subtraksjon: Egentlig addisjon med det negative; " $5-3$ " betyr $5+(-3)$,

$$[2 \ 3] - [1 \ 0] \text{ betyr } [2 \ 3] + (-1) \cdot [1 \ 0]$$

Division: Egentlig multiplikasjon med inversen; " $5:3$ " eller " $5/3 = \frac{5}{3}$ " betyr

$$5 \cdot 3^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{3}$$

Matriser: Har ingen division, men vi har invers.

[2]

$$\text{Tal: } 3^{-1} \cdot 3 = 3 \cdot 3^{-1} = 1$$

$$A^{-1}: A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = [2] \in \text{Matrise, liken} \\ \text{p}^{\circ} 1.$$

$\rightarrow I$

Definisjon

En $n \times n$ -matrise er invertibel dersom det eksisterer ei $(n \times n)$ -matrise G slik at $AG = GA = I_n$.

G er inversmatrise til A ; $G = A^{-1}$.

NB: Vi snakker her om inversmatriser for kvadratiske matriser.

Eksempel

Finn $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$. Vis at $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Skal ha X slik at $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

La $X = [\vec{x}_1 | \vec{x}_2]$

To likninger: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Totalmatrise for begge:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Alttså: $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$X = [\vec{x}_1 | \vec{x}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Kontrol:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 6-6 \\ -1+1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Skal også ha at det modsatte produktet blir I_2 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} = I_2 \quad \text{Ok}$$

(Slik er det alltid for invertible matriser)

Metode:

$$[A | I] \sim \dots \sim [I | A^{-1}]$$

For $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Spelekar: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{bmatrix} = I_2 \quad \text{når } ad-bc \neq 0.$$

$ad-bc$: Determinanten til $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- Formel for inversen til en generelt
 2×2 -matrise.

[?] Når vil vi lære å finne en
inversmatrise for A ?

$$[A | I] \sim [I | A^{-1}]$$

Må lære: $A \sim I$ - vi vil kunne rekke-
redusere A til I . Hvis ikke:
 A er ikke invertibel.

Eksempel

Gitt $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

er A , B og C invertible?

det $A = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 12 \neq 0 \Rightarrow A$ er invertibel

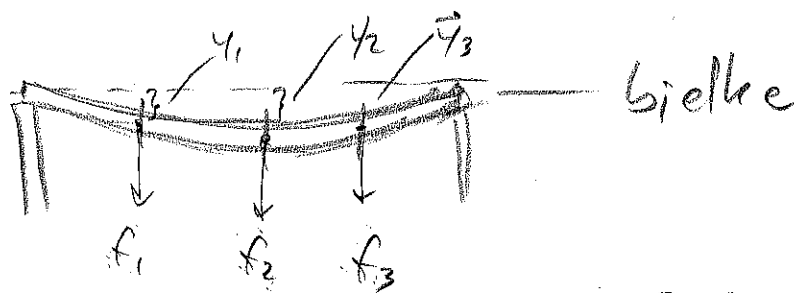
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{+R_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ikke leiende tall i søyle 3. B kan

ikke reduceret til I_3 og er
derfor ikke invertibel.

C : Ikke kvadratisk.

Eksempel (Eksempel 3 i læreboka)



Hook's lov: $\vec{y} = D \vec{f}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$

(Egentlig: "Uendelig mange" punkter langs bjelken.

- Ser på berre tre for å gjøre det enklere).

Dersom kreftene f_1 , f_2 og f_3 virker
i pkt. 1, 2, 3, får vi avbøyningene

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

↑
Flexibilitetsmatrise

[2] Er D diagonal?

Vil kreft i 2 påvirke pkt. 1 og 3?

→ Ja; Der ikke diagonal

[?] Om vi vert kreftene, kan vi da finne avbøyinga?

→ $\vec{y}_d$:

$$\vec{y} = D \vec{f} \Leftrightarrow \underbrace{D^{-1} \cdot D}_{I} \vec{f} = D^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{f} = D^{-1} \vec{y}$$

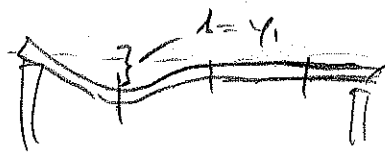
↑ stivhetsmatrise

[?] Hva representerer søylene i D^{-1} ?

$$D^{-1} \vec{e}_1 = D^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{første søyle}$$

- Kreftene som må til for at

$$y_1 = 1, y_2 = y_3 = 0$$



Ser: f_2 må være negativ (peiler oppover)

Eksempel

Finne B^{-1} når

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[B | I_3] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow 2 \\ \uparrow 1 \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \leftarrow \\ \sim \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \uparrow 1 \\ \leftarrow \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ 4-2 \sim \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [I_3 | B^{-1}]$$

Also: $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -7 & -10 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Kontroll: $B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -7 & -10 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -6+7+0 & -10+10+0 & 4-4+0 \\ 9-7-2 & 15-10-4 & -6+4+2 \\ 12-7-5 & 20-10-10 & -8+4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Ok.

