

① Beskriv

- Rom for rekvirering 10:30 i morgen:

PI-259 (her på huset)

- Minne om oblig-info.

② Sammen sette transformasjoner

Sist tysdag:

T: "Spjeling om linje $y=x$ / $x_2=x_1$

2) — " — " x_1 -aksen

U: Same men motsett rekkefølge

$$\text{Først: } T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Standardmetr.

$$U\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Har også sett:

$$\text{Spesling om } x_2 = x_1: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\text{— " — } x_1\text{-aksen: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B$$

Alttså:

$$T(\vec{x}) = B \cdot (A\vec{x})$$

$$\text{Sjekk: } A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B(A\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

Tilsvarende:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}) &= A \cdot (B\vec{x}) = A \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

- Kjenner alt standardmatrisene til T og U .

Men Kan vi definere matrisemultiplikasjon slike at vi kan droppe parentesene?

Yes we can

$$u(\vec{x}) = A(B\vec{x}) \stackrel{?}{=} (AB)\vec{x}$$

NB: Legg merke til at parentesene har
alt å seie.

Korleis må matriseproduktet AB vere?

Vert: $AB\vec{x} = A(B\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Med $B = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$

$$A(B\vec{x}) = A(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2) = x_1 A\vec{b}_1 + x_2 A\vec{b}_2 =$$

$$[A\vec{b}_1 \mid A\vec{b}_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (AB)\vec{x}$$

$$AB = [A\vec{b}_1 \mid A\vec{b}_2]$$

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = [A\vec{b}_1 \mid A\vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ - standardmatr. til } u$$

$$\text{Tilsvarende: } T(\vec{x}) = B(A\vec{x}) = BA\vec{x}$$

$$BA = [B\vec{a}_1 \mid B\vec{a}_2]$$

$$B\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \text{standardmatr. til } T.$$

Merk: $\boxed{AB \neq BA}$

- rekkefølge spiller ei rolle (ulike tall)

Definisjon

La A vere ei $m \times n$ -matrise og B vere ei $n \times p$ -matrise med søyler $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p$. Matriseproduktet AB er da' definert ved

$$AB = [A\vec{b}_1 \mid A\vec{b}_2 \mid \dots \mid A\vec{b}_p]$$

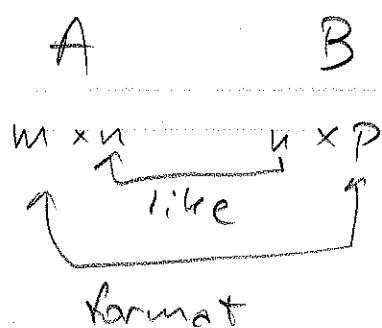
② Kva format har AB ?

- Tydelegvis p søyler

A har m rekker $\Rightarrow A\vec{b}_i \in \mathbb{R}^m$

AB er ei $m \times p$ -matrise.

[?] For to matriser A og B , hva
må vi kreve for at AB skal være
veldefinert?



A må ha like mange
søylar som B har
rekkar.

Eksempel

Rekn ut AB når

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

c) Med A og B som i a) og b):
Rekn ut BA

$$a) B = [\vec{b}_1 | \vec{b}_2 | \vec{b}_3]$$

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6 \\ -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 \\ -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = [A\vec{b}_1 | A\vec{b}_2 | A\vec{b}_3] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ -5 & -5 & -1 \end{bmatrix}}}$$

Kjappare måte:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6 & 2-2 & 3+4 \\ -2-3 & -4-1 & -3+2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ -5 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Skrivemåte

	B
A	m

- Ok, men ikke før det inn.

$$b) AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+8 & 6+0+6 \\ 2+0+16 & 4+0+12 \end{bmatrix} \\ = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}}}$$

Format?

2x3 3x2
↑ ↗ ↘
↑ ↗ ↘

Frå² b):

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 & 0+0 & 2+8 \\ 9+0 & 0+0 & 6+0 \\ 12+6 & 0+0 & 8+12 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 9 & 0 & 6 \\ 18 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Ser: $AB \neq BA$ - dei har ikkje ein
gang same format.

Frå² a): $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

B har 3 søyler, A har 2 rekker.
Produktet er ikke definert.

③ Arbeid med matrise-aritmetikk

Addisjon og skalar-multiplikasjon:
Hei! "straight forward"

$A+B$: Legg saman element for element

cA : Ganger alle element i A med c.

[2] - Hva krav må vi stille til A og B
for at $A+B$ skal være veldeterminert?
- Og for at CA skal være veldeterminert?

1) A og B må ha samme form og
-like mange rader som søyler.

2) CA : Går alltid bra.

Eksempel

Finn $A+B$, $2 \cdot A$ og $3A - 2B$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+(-2) \\ 3+(-7) & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}}$$

$$3A - 2B = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 3-2 & 6-(-4) \\ 9-(-14) & 12-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}}$$

④ Reknerregler

Når A, B, C har format som gir at uttrykket er definerte.

a) $A(BC) = (AB)C$ (-kan sjå bort frå parentesar)

b) $A(B+C) = AB + AC$

c) $(B+C)A = BA + CA$

d) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, r skalar

Formatet til A : $m \times n$

e) $I_m A = A I_n = A$

- Multiplikasjon med identitetsmatrise gir A tilbake (akkurat som med vektorer; $I_n \vec{x} = \vec{x}$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$).

- Skal ikke bevise disse

⑤ To omgrep til

Potens av matrise:

$$A^P = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{P \text{ ganger}}$$

[?] For hva matriser er A^P veldefinert?

$$A^2 = A \cdot A$$

$m \times n \quad m \times n$


Må ha: $n=m$; A er en $n \times n$ -matrise.

Matrise med like mange rekker som søyler: Kvadratiske.

Transponering: A^T - byter om rekker og søyler i A .

[?] Hvis A har formatet $m \times n$, hva format har A^T ?

→ $n \times m$

Eksempel

Finn A^2 , B^T og C^2 når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}}}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 0 + 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 & 0 + 2 \cdot 2 + 0 & 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \dots =$$

$$\begin{bmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{bmatrix}$$

Tilsvarende:

$$C^T = \begin{bmatrix} 3^T & 0 & 0 \\ 0 & 2^T & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2187 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

-Slik er det alltid for diagonale

matriser

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$