

Førelsing, BYFE 1000

16/9

① Beskjeder?

Løysingsforslag på Fronter

Oblig. innlever. 1 blir lagt ut snart.

Sakene kunne deleles opp. (Flaut.)

② Eksempel, s. 11 og 12 i notat fra 9/9

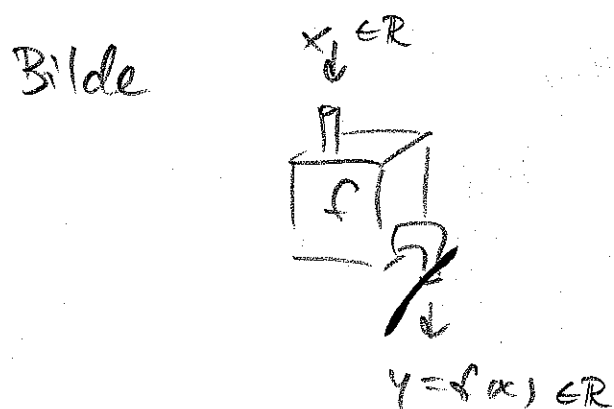
③ Illustrere transformasjoner

Bilde : MATLAB

(Flip og skalering av "Clown",
rotasjon av "knot".)

④ Transformasjoner

[?] Kva er ein funksjon?

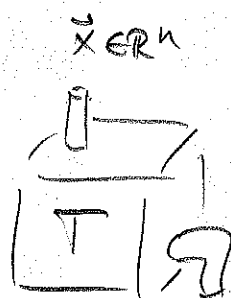


- Puttar x inn og får $f(x)$ ut.

Transformasjon: Det same, men x og $f(x)$ kan vere vektorar

$$x \mapsto f(x)$$

$$\vec{x} \mapsto T(\vec{x})$$



Merke $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$ treng ikkje vere like.

$\mathbb{R}^n$: Frårom ("domain")

$\mathbb{R}^m$: Tilrom ("codomain")

[?] Korleis kan vi stå på ein funks. $f(x)$ som ein trans.?

Eksempel

Disse transformasjoner er gitt:

S og T der

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{bmatrix} \quad \text{og}$$

$$\circ \quad T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{der} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Kva er $\ker$ - og tilromme for T og U ?

b) Rekn ut $S(\vec{u})$, $S(\vec{v})$, $S(2\vec{u})$ og $S(\vec{u} + \vec{v})$
for $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) Rekn ut $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$, $T(2\vec{u})$ og $T(\vec{u} + \vec{v})$
for $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

NB: Vi gir transformasjoner navn med stor bokstav, T , U , V o.s.b.

Matriser: Også stor bokstav, A , B o.s.b.

Vektorer: Små bokstaver med pil over,
 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ o.s.b.

a) Ser: T tar vektorer $\in \mathbb{R}^2$ og "lægger" vektorer $\in \mathbb{R}^3$.

Fraom: $\mathbb{R}^2$, tilrom: $\mathbb{R}^3$

A : 2×4 -matrise

4 søyler: $\vec{x}$ må vere $\in \mathbb{R}^4$ for at $A\vec{x}$ skal vere definert. - Ser også at produktet vil ligge $\in \mathbb{R}^2$.

Fraom for $u: \mathbb{R}^4$, tilrom: $\mathbb{R}^2$.

$$b) S(\vec{u}) = S\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (-1)^2 \\ 1^2 \\ \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$S(\vec{v}) = S\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3^2 \\ 4^2 \\ \sqrt{3^2 + 4^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$S(2\vec{u}) = S\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (-2)^2 \\ 2^2 \\ \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ \sqrt{8} \end{bmatrix}$$

$$S(\vec{u} + \vec{v}) = S\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ \sqrt{29} \end{bmatrix}$$

$$c) T(\vec{u}) = A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4-3+0 \\ 2+0-1+3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

$$T(2\vec{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 \\ -4+2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

I dette kurset skal vi ^{nesten} utelukke side
 ☺ lineære transformasjoner

[?] Hva for videre operasjoner er lineære?
 → addisjon og skalarmultiplikasjon.

En lineær trans. tar vare på den
 lineære sammenhengen mellom vektorer.

Definisjon

En transformasjon $T(\vec{x})$ er lineær
 hvis, og berre hvis,

a) $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$ og

b) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\vec{x}, \vec{y}$ i frårommet.

[?] I eksempel: Er S og T lineære?

$$S(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 25 \\ \sqrt{29} \end{bmatrix}, \quad S(\vec{u}) + S(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ \sqrt{2} + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Nei, S er ikke lineær.

$$T(2\vec{u}) = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad 2T(\vec{u}) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = T(2\vec{u})$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = T(\vec{u} + \vec{v})$$

[?] Betyr det at T er lineær?

Nei, skal gjelde for alle c , $\vec{x}$ og $\vec{y}$.

Vi har herre vist a) for $c=2$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og

b) for $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

For å vise at T ikke er lineær:

- Nok med ett moteksempel.

For å vise at T er lineær: Man vise det for alle c , $\vec{x}$, $\vec{y}$. (Mer jobb.)

Men: For matrisemultiplikasjon gjeld

$$A(c\vec{x}) = c A\vec{x} \quad \text{og}$$

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$$

(sid 39)

Defor: Alle trans. på forma $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ er lineære.

Eksempel

a) Vis at trans. T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ defineret ved $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + 3 \end{bmatrix}$ ikke er lineær.

○

b) Trans U fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ er givet ved at længde på vektoren w skal transformere bliver doble. Vis at U er lineær.

a) $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

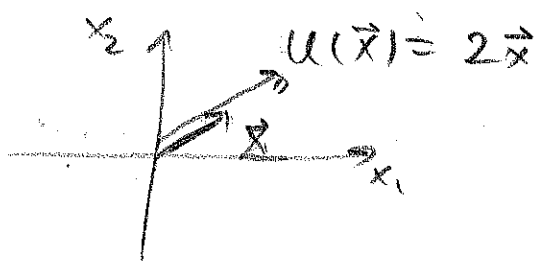
○

$$T(2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+2 \\ 0-2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

T er ikke lineær

□

b) Doble længde: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$



$$U(c\vec{x}) = U\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = 2 \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix} = 2c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} =$$

$$c U(\vec{x})$$

$$U(\vec{x} + \vec{y}) = U\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = U\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 2y_1 \\ 2x_2 + 2y_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underline{U(\vec{x}) + U(\vec{y})}$$

U is linear,

□

[?] For ein linear trans., kva er transformasjonene av nullvektoren?

$$T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot T(\vec{x}) = \vec{0}; \quad T(\vec{0}) = \vec{0} \quad \underline{\text{alltid}}$$

Generalisering:

$$T(c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_p \vec{v}_p) =$$

$$c_1 T(\vec{v}_1) + c_2 T(\vec{v}_2) + \dots + c_p T(\vec{v}_p)$$

Eksempel

$$\text{Gitt } T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{bmatrix} /$$

a) finn $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

b) vis at T er lineær.

c) bestem $\vec{x}$ slik at $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

d) bestem $\vec{x}$ slik at $T(\vec{x}) = \vec{0}$

a) $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 - 0 + 2 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) Kan gjøre det slik:

$$\circ T(c\vec{x}) = T\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx_1 - cx_2 + cx_3 \\ 3cx_1 + 2cx_2 \\ 2cx_1 + 3cx_2 - cx_3 \end{bmatrix} = \dots =$$

$$c \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{bmatrix} = c T(\vec{x})$$

$$\text{og } T(\vec{x} + \vec{y}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) = \dots$$

Alternativt:

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ 2x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$
$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}}_A \vec{x}$$

Poeng: T kan skrivas som ^A

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad - \text{matrismultiplikation.}$$

Däför är T linjär.

c) Skal ha: $T(\vec{x}) = \vec{b}$ med $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Altså: $A\vec{x} = \vec{b}$

Totalmatrise:

$$[A | \vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-3 \cdot R_1 \rightarrow R_2 \\ -2 \cdot R_1 \rightarrow R_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}x_3$$

$$x_2 = -\frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_3$$

x_3 fri

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{11}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Ser rett av svaret:

Den generelle løsningen av $T(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$A\vec{x} = \vec{0} \text{ er } \vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$A \cdot x_3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{5} A \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{x_3}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{5} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -6 & 6 & 0 \\ -4 & 9 & -5 \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \text{Ok}$$

