
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 8

Matriser

Løsningsforslag

Oppgave 1 – Redusert trappeform og løsning av lineære likningssystemer

a) Totalmatrisa blir

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 7 & 30 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & -16 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 17 \end{bmatrix}.$$

Vi tilordner dette i MATLAB:

```
>> format compact
>> T=[5 1 1 -2 2
1 -1 1 7 30
2 1 0 -5 -16
2 0 1 3 17]
T =
     5     1     1    -2     2
     1    -1     1     7    30
     2     1     0    -5   -16
     2     0     1     3    17
```

b) Vi lar MATLAB ta seg av rekkereduseringa:

```
>> rref(T)
ans =
     1     0     0     0     1
     0     1     0     0     2
     0     0     1     0     3
     0     0     0     1     4
```

Svar: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ og $x_4 = 4$. På vektor-form:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

c) Vi setter opp totalmatrisa og bruker **rref**-funksjonen:

```
>> T=[1 2 0 -2 1 0; 2 -1 3 1 0 7; 3 1 3 1 -5 -8]
T =
     1     2     0    -2     1     0
     2    -1     3     1     0     7
     3     1     3     1    -5    -8
>> rref(T)
ans =
 1.0000         0  1.2000         0  0.2000  2.8000
         0  1.0000 -0.6000         0 -2.6000 -8.9000
         0         0         0  1.0000 -3.0000 -7.5000
```

Det gir

$$\begin{aligned} x_1 + 1.2x_3 + 0.2x_5 &= 2.8 \\ x_2 - 0.6x_3 - 2.6x_5 &= -8.9 \\ x_4 - 3x_5 &= -7.5 \end{aligned}$$

som igjen gir:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.8 - 1.2x_3 - 0.2x_5 \\ x_2 &= -8.9 + 0.6x_3 + 2.6x_5 \\ x_4 &= -7.5 + 3x_5 \end{aligned}$$

der x_3 og x_5 er frie. På parametrisk vektor-form:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ -8.9 \\ 0 \\ -7.5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -0.2 \\ 2.6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 – Med og uten punktum

a) Vi kan for eksempel tilordne A og B slik:

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> B=[-2 -1 0; 0 1 0; 7 -2 1]
B =
    -2    -1     0
     0     1     0
     7    -2     1
```

b) Vi regner ut produktene i kommandovinduet:

```
>> A.*B
ans =
    -2    -2     0
     0     5     0
    49   -16     9
>> A*B
ans =
    19    -5     3
    34   -11     6
    49   -17     9
```

Vi ser at det første produktet har elementene blitt multiplisert sammen. Den andre produktet, uten punktum, er matriseproduktet¹:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+21 & -1+2-6 & 0+0+3 \\ -8+0+42 & -4+5-12 & 0+0+6 \\ -14+0+63 & -7+8-18 & 0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 3 \\ 34 & -11 & 6 \\ 49 & -17 & 9 \end{bmatrix}$$

¹For de av dere som går i maskin- eller kjemi-klassa: Dette vil dere lære veldig snart.

Oppgave 3 – Noen spesielle matriser

Svarene i deloppgave a) - e) blir:

```
>> eye(3)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
>> ones(2,3)
ans =
     1     1     1
     1     1     1
>> -2*ones(2,3)
ans =
    -2    -2    -2
    -2    -2    -2
>> ones(3,3)-eye(3)
ans =
     0     1     1
     1     0     1
     1     1     0
>> diag(1:4)
ans =
     1     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     3     0
     0     0     0     4
```

I deloppgave e) og f) lager vi matriser med tilfeldige tall.

```
>> rand(2,2)
ans =
    0.8143    0.9293
    0.2435    0.3500
>> rand(2,2)
ans =
    0.1966    0.6160
    0.2511    0.4733
>> rand(2,2)
ans =
    0.3517    0.5853
    0.8308    0.5497
```

“» `rand(2,2)`” gir ei 2×2 -matrise med tilfeldige tall mellom 0 og 1. Merk at vi får ei ny matrise hver gang selv om vi skriver den samme kommandoen.

Vi regner ut noen matriser med kommandoen gitt i deloppgave f):

```
>> 10*(rand(2,2)-0.5*ones(2,2))
ans =
    -3.3435    -2.3703
     1.0198     1.5408
>> 10*(rand(2,2)-0.5*ones(2,2))
ans =
     1.8921    -0.4946
     2.4815    -4.1618
>> 10*(rand(2,2)-0.5*ones(2,2))
ans =
    -2.7102    -3.4762
     4.1334     3.2582
>> 10*(rand(2,2)-0.5*ones(2,2))
ans =
     0.3834    -4.2182
     4.9613    -0.5732
```

Det ser ut til at vi får laga 2×2 -matriser med tilfeldige tall i intervallet $[-5, 5]$. Når vi trekker $0.5 \cdot \text{ones}(2, 2)$ fra $\text{rand}(2, 2)$, får vi tilfeldige tall mellom -0.5 og 0.5 . Ganger vi dette med 10, får vi tilfeldige tall mellom -5 og 5 .

Oppgave 4 – Testing av “regneregler”

I hver oppgave genererer vi tilfeldige matriser A , B og eventuelt også C på samme måte som i deloppgave 2 f).

```
a) >> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
    >> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
    >> A+B-(B+A)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> A+B-(B+A)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
```

```
>> A+B-(B+A)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Her har vi laga tilfeldige A - og B -matriser tre ganger. Hver gang har vi fått at differansen $A + B - (B + A)$ blir nullmatrisa. Dette tyder på at regneregelen er rett.

```
b) >> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> C=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> (A*B)*C-A*(B*C)
ans =
 1.0e-14 *
    0.3553    0.7105    0.5329
         0   -0.7105   -0.1776
    0.3553         0    0.1776
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> C=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> (A*B)*C-A*(B*C)
ans =
 1.0e-13 *
    0.0711   -0.0355    0.1066
    0.1421    0.0711         0
    0.0711         0         0
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> C=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> (A*B)*C-A*(B*C)
ans =
 1.0e-13 *
    0.1421         0   -0.0711
         0    0.1421   -0.2842
   -0.1066         0    0.0355
```

Også her har vi testa regneregelen med tre ulike sett av tilfeldige matriser. Matrisene har blitt skrevet på en slik måte at alle tall i matrisa skal ganges med det tallet som står øverst. Hver gang har vi fått matriser der dette tallet er 10^{-13} eller mindre. Med andre ord er alle elementene sammenlignbare med maskinpresisjonen (ϵ). Derfor kan vi ikke uten videre si at dette er ulik null. Dette resultatet tyder altså på at regneregelen er rett.

```
c) >> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> (A*B).'-(A.'*B.')
ans =
```

```

-7.6774 -11.3022 24.8796
-10.6053 0.2678 -15.6531
-1.1223 38.7436 7.4096

```

Dette resultatet er slett ikke lik null-matrissa. Vi har funnet et moteksempel som viser tydelig at “regneregelen” ikke stemmer.

d) I første omgang kan vi fortsette med samme A og B:

```

>> (A*B).'-(B.'*A.')
ans =
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> (A*B).'-(B.'*A.')
ans =
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> (A*B).'-(B.'*A.')
ans =
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0

```

Mye tyder på at $(AB)^T$ faktisk *er* lik $B^T A^T$...

```

e) >> det(A*B)-det(A)*det(B)
ans =
-3.9080e-13
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> det(A*B)-det(A)*det(B)
ans =
-4.5475e-13
>> A=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> B=10*(rand(3,3)-0.5*ones(3,3));
>> det(A*B)-det(A)*det(B)
ans =
9.0949e-13

```

Svaret, som denne gangen blir et tall, ikke ei matrise, ser ut til å bli veldig nær null. Det ser ut til at regneregelen stemmer.

f) Vi skal teste om vi får ulike svar om vi regner ut potensene med eller uten punktum:

```
>> A^4-A.^4
ans =
    1.0e+03 *
    0.1356    -0.9036    -0.5729
   -0.7370     1.2437     0.8025
   -0.3747     0.4655     0.2475
```

Som vi ser av faktoren “1.0e+03”, altså 10^3 , er denne matrisa langt fra null; regnereglen er feil. A^4 er altså noe helt anna enn det vi får om vi opphøyer hvert element i A i 4.

g) Vi kan lage 3×3 -diagonalmatriser med tilfeldige tall langs diagonalen slik:

```
>> x=10*(rand(1,3)-0.5*ones(1,3))
x =
    1.9811    1.6653   -3.2187
>> D=diag(x)
D =
    1.9811         0         0
         0    1.6653         0
         0         0   -3.2187
```

Vi tester regneregelen fra f) igjen – denne gangen for diagonalmatriser:

```
>> D^4-D.^4
ans =
    1.0e-13 *
    0.0178         0         0
         0         0         0
         0         0    0.1421
>> x=10*(rand(1,3)-0.5*ones(1,3));
>> D=diag(x);
>> D^4-D.^4
ans =
    1.0e-13 *
         0         0         0
         0         0         0
         0         0   -0.1421
>> x=10*(rand(1,3)-0.5*ones(1,3));
>> D=diag(x);
>> D^4-D.^4
ans =
    1.0e-13 *
         0         0         0
         0   -0.0003         0
         0         0    0.2842
```

Det ser ut til at det er enklere å regne ut potenser av diagonalmatriser enn andre matriser.