
Matematikk 1000

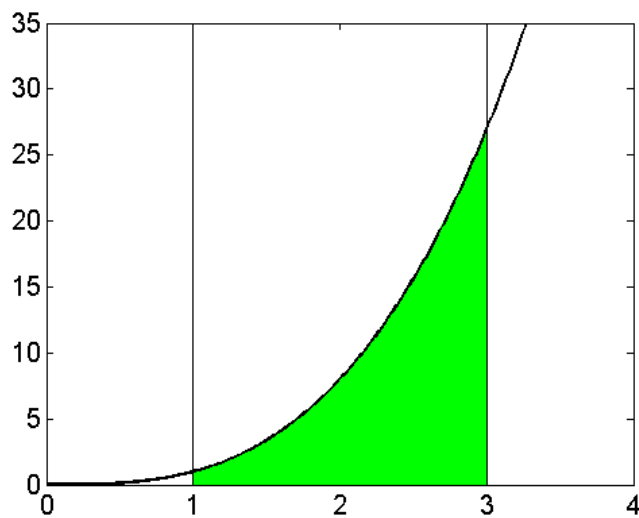
Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 9

Numerisk integrasjon

Forståelsen av integralet som et areal ligger til grunn når vi skal beregne integraler numerisk. Litt mer presist: Når $f(x) \geq 0$ for alle x i intervallet $[a, b]$, kan vi oppfatte integralet

$$\int_a^b f(x) dx$$

som arealet avgrensa av x -aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til f . Se figur 1.



Figur 1: Figuren illustrer hvordan integralet $\int_a^b f(x) dx$ kan sees på som et areal (når $f(x) \geq 0$). Her er $f(x) = x^3$, $a = 1$ og $b = 3$.

Til sist i dette oppgavesettet – for spesielt interesserte, introduserer vi en helt annen måte å regne integraler på: Monte Carlo-integrering. Denne metoden er ikke pensum, så dersom du ikke er spesielt nysjerrig, kan du hoppe over denne oppgava med god samvittighet. Men metoden er både artig og nyttig – ikke minst når det gjelder integraler over flere variable.

Oppgave 1 – Integral som en sum av rektangler

Vi tar utgangspunkt i funksjonen

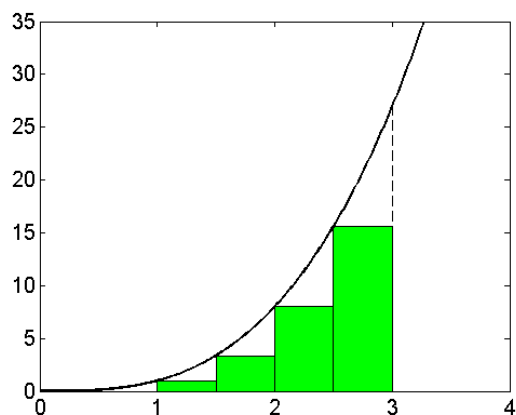
$$f(x) = x^3$$

og avgrenser x til intervallet $[1, 3]$

- a) Bruk intergrasjonsregler du kjenner fra før til å regne ut $\int_1^3 f(x) dx$. (Gjør dette med papir og blyant.)
- b) Regn ut summen

$$0.5 \cdot f(1) + 0.5 \cdot f(1.5) + 0.5 \cdot f(2) + 0.5 \cdot f(2.5) ,$$

og sammenlign den med svaret i a). (Dette kan gjøres med papir og blyant eller i MATLAB.) Se figur 2.



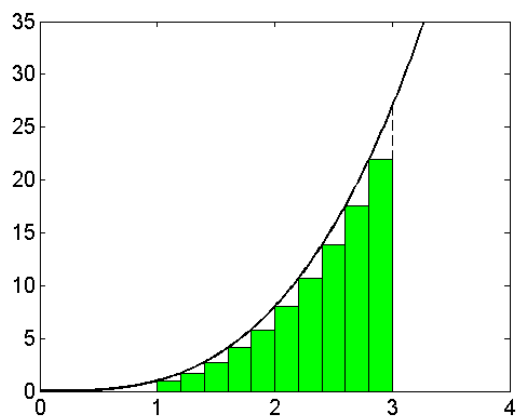
Figur 2: Her har vi delt intervallet $[1, 3]$ opp i 4 mindre intervaller med lengde $\Delta x_4 = 1/2$. For hvert delintervall har vi et rektangel med høyde bestemt av funksjonen $f(x)$.

- c) Summen fra b) kan skrives slik:

$$\Delta x_4 \sum_{i=1}^4 f(x_i) ,$$

der $\Delta x_4 = (3 - 1)/4$ og $x_i = 1 + (i - 1)\Delta x_4$. Om vi hadde delt intervallet $[1, 3]$ opp i n deler i stedet for 4 deler, ville summen sett slik ut:

$$\Delta x_n \sum_{i=1}^n f(x_i) ,$$



Figur 3: Denne figuren viser det samme som figur 6 – bortsett fra at vi her har delt intervallet på x -aksen opp i 10 biter i stedet for 4.

der $\Delta x_n = (3 - 1)/n$ og $x_i = 1 + (i - 1)\Delta x_n$.

Hvorfor kan vi si at en sum av denne typen vil nærme seg integralet fra a) når n blir større og større? (Hint: Se figur 3.)

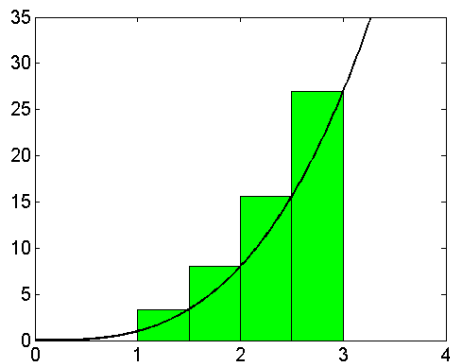
Lag et MATLAB-skript som regner ut summen over og bruk det til å finne summen for ulike¹ verdier av n .

- d) Hvor stor å n være, sånn omtrent, for at forskjellen mellom summen og integralet skal være mindre enn 10^{-3} ?
- e) I figur 2 ser vi at høyden av rektanglene konsekvent er gitt ved $f(x)$ -verdien i venstre kant. Om vi i stedet hadde brukt høyre kant, som i figur 4, vil x_i bli endra til $x_i = 1 + i\Delta x_n$. Justér skriptet ditt slik at den regner ut en “høyre sum” i stedet for en “venstre sum” som over og gjenta deloppgave d) med dette skriptet.
- f) Et tredje alternativ er å regne ut summen med x_i gitt ved midtpunktene, $x_i = 1 + (i - 1/2)\Delta x_n$. Se figur 5.

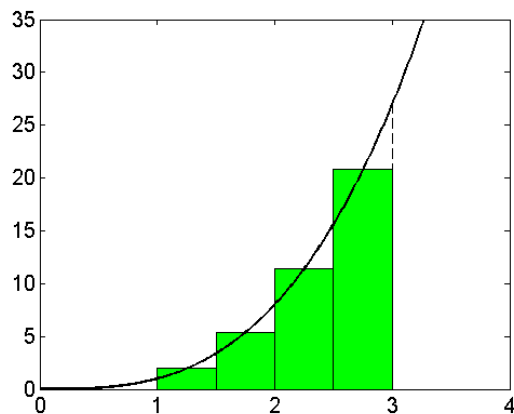
Hvor stor må nå n være for at forskjellen mellom summen og integralet blir mindre enn 10^{-3} ?

Summer av denne typen kaller vi *Riemann-summer*. Du vil nok høre mer om slike siden.

¹Det enkleste er å skrive n inn i skriptet og lagre det på nytt hver gang. Men vi kan unngå dette ved å gjøre skriptet om til ei funksjonfil med n som argument eller ved å bruke `input`-kommandoen i MATLAB.



Figur 4: Denne figuren viser det samme som figur 2 bortsett fra at høgda av rektanglene er bestemt av funksjonsverdien i høyre kant av hvert del-intervall – i stedet for venstre kant som i figur 2.

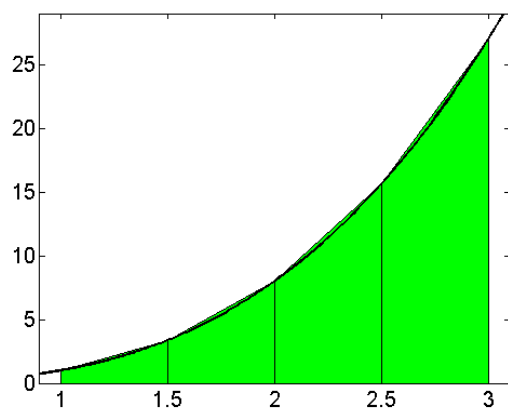


Figur 5: Denne figuren viser det samme som figur 2 og 4 – bortsett fra at høgda av hvert rektangel her er bestemt ved midtpunktet i hvert del-intervall.

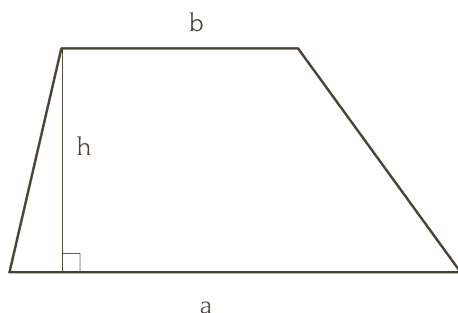
Oppgave 2 – Integral som en sum av trapeser

I denne oppgava bruker samme $f(x)$ og samme intervall for x som i oppgave 1.

- Med utgangspunkt i figur 6: Estimér integralene ved å regne ut summen av arealene av trapesene. (Et trapes er en firkant der to av sidene er parallelle og de to andre ikke trenger å være det. Arealet av et trapes er gitt ved $h(a + b)/2$, se figur 7.)
- Med $n = 4$, vis, med papir og blyant, at summen i a) er gjennomsnittet av venstre- og høyresummen fra oppgave 1. (Dette gjør vi med papir og blyant.)



Figur 6: Figuren viser hvordan integralet kan estimeres som en sum av arealene til trapeser.



Figur 7: Et trapes.

- c) Med en generell n , kan trapes-summen skrives som

$$T_n = \Delta x_n \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n) \right)$$

der $\Delta x_n = (b - a)/n$ og $x_i = a + i\Delta x_n$. Merk at $x_0 = a$ og $x_n = b$. (Her er $a = 1$ og $b = 3$.)

Lag et skript som regner ut denne summen og finn summen for ulike verdier av n . (Dette kan gjøres ved å lage ei **for**-løkke med **if**-satser som tar for seg det første og siste leddet inni. Men det enkleste er å la **for**-løkka bare gå fra og med $i = 1$ til og med $i = n - 1$ og så håndtere endene, $i = 0$ og $i = n$, for seg selv.)

- d) Hvor stor må n være nå for at differansen mellom integralet og summen av trapes-areal skal bli mindre enn 10^{-3} ?

Oppgave 3 – Uten “fasit”

I denne oppgava skal vi blant annet regne ut integralet

$$\int_0^2 \sin x^2 dx \quad .$$

Selv om $\sin x^2$ kan være både positiv og negativ når $x \in [0, 2]$, vil likevel trapes-summen fra oppgave 2 gi gode estimater for integralet når n blir stor nok.

- a) Bruk skriptet du lagde i oppgave 2 til å finne ei tilnærming til dette integralet. Hva ser integralet ut til å bli? (Sagt på en annen måte: Hva ser det ut til å *konvergere* mot?)
- b) Hvorfor har vi ikke bedt deg finne dette integralet ved anti-derivasjon?
- c) På samme måte over: Forsøk å bestemme følgende integral:
 - i) $\int_{-5}^2 te^{t^3} dt$
 - ii) $\int_0^{1/2} \tan(x^2 + 1) dx$
 - iii) $\int_{-1}^1 \sin x^3 dx$
- d) Selv om vi ikke kan finne noen enkel antiderivert til $\sin x^3$, kan vi likevel si med sikkerhet at $\int_{-2}^2 \sin x^3 dx = 0$. Hvorfor kan vi være så sikre på dette?
- e) Endre den øvre integrasjonsgrensa i integralet i deloppgave d) ii) til 1. Hva skjer når du forsøker å regne ut integralet? Hvorfor skjer dette?

Generelt er det helt essensielt at vi sjekker at svaret vårt *konvergerer* før vi konkluderer med at vi har bestemt integralet; vi kan ikke tillate at verdien vi får for integralet skal være avhengig av n .

Ekstra-oppgave: Monte Carlo-integrasjon

For å være tydelig: Denne metoden er ikke pensum. Men den kan være verd å se litt på likevel. Teorien er ikke vanskelig.

Middelverdien, eller gjennomsnittet, av en integrerbar funksjon f på intervallet $[a, b]$ er definert som

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad .$$

Samtidig vet vi at vi kan finne gjennomsnittet ved å gjøre mange “målinger”, legge dem sammen og dele på antallet. Tenk deg at vi velger mange x -verdier tilfeldig og finner $f(x)$ for hver av dem slik at vi får et sett med f -verdier: $f(x_1)$,

$f(x_2), \dots, f(x_n)$. Her har vi gjort n “målinger”. Om n er stor nok, vil vi, som sagt, kunne finne gjennomsnittet slik:

$$\bar{y} \approx \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad .$$

- a) Ut fra det som står over, forklar hvorfor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

for store n .

- b) Funksjonen `rand` i MATLAB gir et tilfeldig² tall mellom 0 og 1. Hvordan kan dette brukes til å generere et tilfeldig tall mellom a og b ?
- c) Velg deg en funksjon f og endepunkter a og b og beregn $\int_a^b f(x) dx$ ved anti-derivasjon. Du kan godt velge det vi så på i oppgave 1 og 2. Lag et skript eller ei funksjonsfil som beregner integralet ved hjelp av formelen fra a). La n være en input-variabel. Undersøk hvor stor n må være for at metoden skal gi et rimelig nøyaktig svar. Lag gjerne et plott som illustrerer konvergensens.

²En datamaskin er ikke egentlig i stand til å generere tilfeldige tall; tallet du får ut er et *pseudo-tilfeldig* tall.