
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 6

Numerisk derivasjon

Vi skal se at det er flere måter å regne ut deriverte på – i tillegg til de derivasjonsreglene vi kjenner fra før. Men ikke alle måtene er like gode...

Som vanlig forutsettes det at tidligere gitte oppgavesett er gjort. Hvis så ikke er tilfelle, anbefaler vi at du gjør disse andre settene først.

Oppgave 1 – Funksjoner og tangenter

For hver av de to funksjonene nedenfor, lag et plott av grafen til funksjonen. Prøv estimere stigningstallet til tangenten i punktet $(2, f(2))$ og sammenlign denne med $f'(2)$. Her kan du ha nytte av å legge på et rutenett, '» **grid on**'. Bruke derivasjonsregler du kjenner fra før til å bestemme $f'(2)$. Tegn også inn tangenten i $(2, f(2))$. Ei linje som går gjennom punktet (x_0, y_0) og har stigningstall a oppfyller likninga $y - y_0 = a(x - x_0)$.

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Oppgave 2 – Numerisk derivasjon

- a) Velg deg en eller annen funksjon $f(x)$. Den skal være grei å derivere, men ikke *så* grei at det bli kjedelig. Kjedelig blir det, for eksempel, om du lar f være et første- eller andregradspolynom.

Velg deg en verdi a og regn ut $f'(a)$.

- b) Som kjent er den deriverte definert ved denne grenseverdien:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

Med utgangspunkt i denne definisjonen kan vi komme fram til en måte å regne ut tilnærma verdier av den deriverte på: Vi lar h være liten men endelig (til forskjell fra “*uendelig liten*”, som over):

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad .$$

Dersom h er liten nok, bør dette uttrykket gi en rimeleg god tilnærming – et godt *estimat* – for $f'(a)$.

Bruk stadig lavere verdier av h og undersøk om den tilnærma deriverte du får faktisk nærmer seg $f'(a)$. (Disse utregningene kan du gjøre ganske effektivt om du lager deg ei funksjonfil for funksjonen du valgte i deloppgave a) – og bruker pil-tastene når du skal gjenta kommandoer i kommandovinduet.)

- c) Definisjonen av den deriverte sier ingenting om at h skal være positiv; vi kan også finne tilnærma deriverte ved å “gå bakover”. Dersom $h < 0$, kan vi skrive

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a-|h|) - f(a)}{-|h|} = \frac{f(a) - f(a-|h|)}{|h|} \quad .$$

Om vi lar g være absoluttverdien av h , får vi altså

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-g)}{g} \quad .$$

Bruk denne “bakover”-formelen til å finne tilnærma verdier av $f'(a)$, og undersøk om verdien nærmer seg $f'(a)$ når blir liten.

- d) Om vi tar gjennomsnittet av disse to estimatene, får vi enda en ny formel for å estimere den deriverte:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad .$$

Denne formelen kaller vi *midpunktsformelen for numerisk derivasjon*.

Med papir og blyant: Vis hvordan vi kan komme fram til dette.

- e) Bruk formelen fra e) til å regne ut tilnærma verdier for $f'(a)$. Kan du si noe om hvilken av de tre metodene vi har sett som ser ut til å være best til å estimere $f'(a)$?
- f) Skriv ‘» **eps**’ i kommandovinduet i MATLAB. Dette tallet angir, som tidligere nevnt, *maskinpresisjonen* – det minste tallet ϵ som er slik at datamaskina klarer å skille mellom $1 + \epsilon$ og 1. Dette tallet sier altså noe om nøyaktigheten vi opererer med. Bruk formelen du kom fram til i e) til å estimere $f'(a)$ med h -verdier som er sammenlignbare med og mindre enn **eps**. Hva skjer?

- g) Lag en vektor med flere h -verdier i synkende rekkefølge. Disse kan for eksempel gå fra 1 ned mot 0. Tips: Vektoren $[1, 0.1, 0.01, 0.001]$ kan lages slik: `'> 10.^[0:-1:-3]'`. For hver av de tre måtene å estimere $f'(a)$ på, lag en vektor med absoluttverdien av differansen mellom estimatet og den eksakte verdien av $f'(a)$ for hver verdi i h -vektoren. Plott hver av disse tre vektore mot h -vektoren. Kanskje kan det være en god idé å plote med kommandoen `semilogx` i stedet for `plot`. Denne måten å plote på, bruker en *logaritmisk* x -akse.

Ble det tydeligere hva som gir det beste estimatet for $f'(a)$ nå?

- h) Velg deg en eller annen funksjon $g(x)$ som *er* et andregradspolynom. Bruk gjennomsnitts-formelen du kom fram til i e) til å estimere $g'(a)$ for diverse verdier av a og h . Hva skjer? Klarer du å forklare hvorfor?

Oppgave 3 – Den deriverte fra en tabell

I den forrige oppgava regna vi ut numeriske estimer for den deriverte for en funksjon som vi kjente den deriverte til eksakt. Om du synest dette kunne virke noe unødvendig, kan du nok ha rett; hva skal vi vel med estimer når vi har de eksakte verdiene? Poenget med å gjøre dette var at det gir oss muligheten til å få en følelse av hvor gode disse numeriske estimatene er. Dette hadde vært vanskeligere å få hvis vi ikke hadde hatt “fasiten” – den eksakte deriverte.

I denne oppgava bør det nok bli litt tydeligere hva motivasjonen for å lære om numerisk derivasjon er. Vi tar utgangspunkt i denne tabellen:

År	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Befolkning	1650	1750	1860	2070	2300	2520	3020	3700	4450	5300	6123

Tabellen viser jordens befolkning, målt i antall millioner, for forrige århundre.

- Bruk tabellen til å lage et plott som viser jordens befolkning for de årene som er oppgitt.
- Bruk formelen fra deloppgave e) over til å estimere den deriverte av befolkningsveksten for årene 1910 – 1990.
- Hvorfor fungerer det dårlig å bruke denne formelen om vi skal estimere den momentane befolkningsveksten i årene 1900 og 2000? Hvilke formler kan vi bruke i stedet?
- Lag et skript som renger ut alle disse estimatene. Du får bruk for å lage ei **for**-løkke. Du kan også få bruk for en **if**-sats, men det er mulig å unngå dette. I tillegg til å regne ut disse størrelsene skal skriptet også lage et plott av den deriverte av befolkningsveksten for årene fra og med 1900 til

og med 2000. Lag også et plott for den *prosentwise* veksten disse årene – altså veksten i forhold til folketallet.