
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 5

Litt oppsummering undervegs

I dette settet skal vi repetere en hel del av de tingene vi alt har gjort. Intervallhalveringsmetoden, plotting og summer er relevante stikkord. Det som skiller denne leksjonen fra de tidligere, som vi selvsagt skal ha gjort før vi begynner på denne, er at vi ikke forklarer hvordan ting skal implementeres her. Vi gir bare oppgavene og ber dere løse dem. Sånn vil vi også gjøre det i de obligatoriske innleveringene. Du må gjerne bruke skript og funksjonfiler du har lagd fra før; vi ber deg ikke finne opp hjulet på nytt.

Oppgave 1 – Et skjæringspunkt

Disse funksjonene er gitt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} - e^{-x} \quad \text{og} \\ g(x) &= 1 + \arctan \frac{x}{5}. \end{aligned}$$

“ $\arctan x$ ” er det samme som “ $\tan^{-1} x$ ”.

- Plott grafene til disse to funksjonene. La grafene for f og g ha ulike farger.
- Grafene har bare ett skjæringspunkt. Finn dette skjæringspunktet med ein feil som er mindre enn 10^{-5} .
- Plott skjæringspunktet du fant i b) som en sirkel i plottet fra a).

Oppgave 2 – Noen summer

a) Regn ut disse summene:

- $\sum_{i=1}^{100} i$
(Stemmer svaret ditt med formelen $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$?)
- $\sum_{i=5}^{500} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$
(Også her kan du kontrollere svaret ditt mot den eksakte verdien...)

b) Regn ut summen

$$\sum_{k=-5}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

for $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$ og $n = 10000$. Ser summen ut til å nærme seg noe bestemt når n øker?

c) Gjør det samme som i oppgave b) med summen

$$\sum_{k=0}^n k^2 \cdot 2^{-k/2}.$$

d) Gitt funksjonen $f(x) = x^{3/2}$, regn ut

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 f(x_i),$$

der $x_i = (i-1)/2$.

e) Vi generaliserer det vi gjorde i d) noe: La Δx_n være $4/n$ og $x_i = (i-1)\Delta x_n$. Regn ut summen

$$\Delta x_n \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

for $n = 10$, $n = 50$ og $n = 100$, og sammenlign svaret med integralet $\int_0^4 x^{3/2} dx$.

Som du sikkert forstår, vil det ikke gi så høye odds om dette er noe du vil se mer til senere...

Ekstra-oppgave – Mer om bursdager

Vi antar at alle fødselsdagsdatoer er like sannsynlige i en skoleklasse. Hvor mange elever må det minst være i klassen for at der sannsynligvis er noen med bursdag samme dag?

Litt starthjelp: Elev nummer 1 har bursdag en eller annen dato. Sannsynligheten for at elev nummer 2 har bursdag en annen dag, er $364/365$. Elev nummer 3 har 2 dager mindre å velge i; sannsynligheten for at denne eleven har bursdag på en “ledig” dato er $363/365$. Sannsynligheten for at alle tre har bursdag på ulike datoer, blir da produktet

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot$$