

26th July 2018

# Quantenteleportation

Farzad Schafighpur

26th July 2018

- 1 Grundlegendes
- 2 Teleportation eines Qubits
- 3 Teleportation zweier Qubits
- 4 Teleportation von  $N$  Qubits

### Einstein, Podolsky und Rosen:

"Quantenmechanische Beschreibung der Realität durch eine Wellenfunktion  $\Psi$  ist unvollständig!"

$$\Psi \hat{A} = a\Psi, \quad \Psi \hat{B} = b\Psi, \quad [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

a und b sind nicht gleichzeitig messbar. Jedoch:

$$\Phi = \phi\psi, \quad \phi \hat{A} = a'\phi, \quad \psi \hat{B} = b'\psi$$

a' und b' sind gleichzeitig messbar!

### Beispiel anhand von zwei Spinzuständen

- 1 Präpariere zwei Zustände A und B:

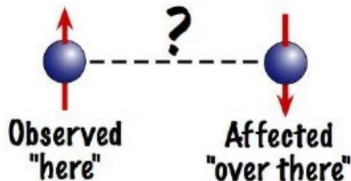
$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$$

- 2 Nachdem die Zustände auseinander propagieren wird an Teilchen A die  $S_Z$ -Komponente gemessen:

Für A:  $|0\rangle \rightarrow$  B:  $|1\rangle$  und vice versa

- Quantenmechanik erlaubt "Spooky actions at a distance" durch verschränkte Wellenfunktionen
- Mögliche Erklärungen durch verborgene Variablen?

### Nature of Wave Functions and Entanglement



Spooky action at a distance<sup>1</sup>

- Ein reiner Zustand  $|\Phi\rangle$  heißt verschränkt falls:

$$|\Phi\rangle \neq |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B, \quad \text{mit: } |0\rangle^A \in \mathcal{H}_A, \quad |1\rangle^B \in \mathcal{H}_B$$

- Ein gemischter Zustand  $\rho$  heißt verschränkt falls:

$$\neq \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad \text{mit: } p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

Verschränkte Zustände können nach Verschränktheitsgrad in vollseparierbar, biseparierbar oder maximalverschränkt eingeteilt werden.

Beispiel für maximal verschränkte Zustände (**Bell-Zustände**):

- $|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \pm |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)$
- $|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \pm |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$



# Teleportation eines Qubits

## Teleportationsablauf

**Alice will einen Zustand zu Bob teleportieren.  
Was braucht sie dafür?**

- ① **Zu teleportierender Zustand:**

$$|\psi\rangle_1 = \alpha |0\rangle_1 + \beta |1\rangle_1$$

- ② **Vorpräparierter Bell-Zustand:**

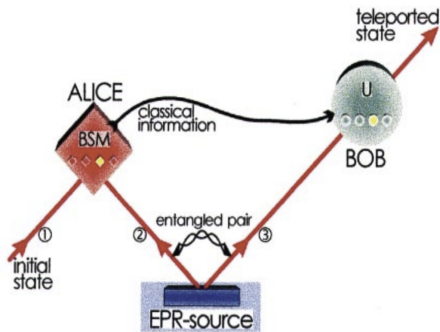
$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 - |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

# Teleportation eines Qubits

## Teleportationsablauf

**Nach Bell-Zustand Messung (BSM) wird die Teilchen 1 und 2 auch verschränkt, damit folgt:**

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= |\psi\rangle_1 \otimes |\Psi^-\rangle_{23} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (|001\rangle - |010\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|101\rangle - |110\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \{ |\Psi^-\rangle (-\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |\Psi^+\rangle (-\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\ &\quad + |\Phi^-\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) + |\Phi^+\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) \} \end{aligned}$$



Schematische Darstellung des Teleportationsablaufes<sup>2</sup>

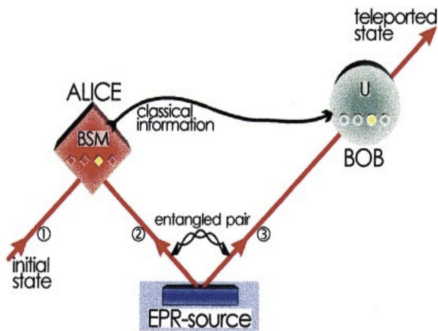
$$|\phi\rangle = \frac{1}{2} \{ |\Psi^-\rangle (-\alpha |0\rangle - \beta |0\rangle) + |\Psi^+\rangle (-\alpha |0\rangle + \beta |0\rangle) \\ + |\Phi^-\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |1\rangle) + |\Phi^+\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) \}$$

<sup>2</sup>D. Bouwmeester, et al, Nature, Vol 390, 11, 1997

# Teleportation eines Qubits

Was bisher geschah, offene Fragen

- Ist nun Zustand 1 bereits teleportiert?
- Oder vielleicht geklont?
- Wofür noch die Übertragung einer klassischen Information?
- Ist Bobs Position wichtig?



Schematische Darstellung des Teleportationsablaufes<sup>2</sup>

<sup>2</sup>D. Bouwmeester, et al, Nature, Vol 390, 11, 1997

# Teleportation zweier Qubits

## Teleportationsablauf

**Zu teleportierender Zustand:**

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle$$

**Vorpräparierter Bell-Zustand:**

$$|g_1\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle)$$

**Bell-Zustände bilden eine Orthonormalbasis:**

$$\sum_{i=1}^{16} |g_i\rangle \langle g_i| = I, \quad |g_i\rangle \langle g_k| = \delta_{ik}$$

# Generalisierte Bell-Zustände

## 16 Bell-Zustände

- $|g_1\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle)$
- $|g_2\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0101\rangle - |1010\rangle - |1111\rangle)$
- $|g_3\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle - |0101\rangle + |1010\rangle - |1111\rangle)$
- $|g_4\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle - |0101\rangle - |1010\rangle + |1111\rangle)$
- $|g_5\rangle = \frac{1}{2} (|0001\rangle + |0100\rangle + |1011\rangle + |1110\rangle)$
- $|g_6\rangle = \frac{1}{2} (|0001\rangle + |0100\rangle - |1011\rangle - |1110\rangle)$
- $|g_7\rangle = \frac{1}{2} (|0001\rangle - |0100\rangle + |1011\rangle - |1110\rangle)$
- $|g_8\rangle = \frac{1}{2} (|0001\rangle - |0100\rangle - |1011\rangle + |1110\rangle)$

# Generalisierte Bell-Zustände

## 16 Bell-Zustände

- $|g_9\rangle = \frac{1}{2} (|0010\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle + |1101\rangle)$
- $|g_{10}\rangle = \frac{1}{2} (|0010\rangle + |0111\rangle - |1000\rangle - |1101\rangle)$
- $|g_{11}\rangle = \frac{1}{2} (|0010\rangle - |0111\rangle + |1000\rangle - |1101\rangle)$
- $|g_{12}\rangle = \frac{1}{2} (|0010\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle + |1101\rangle)$
- $|g_{13}\rangle = \frac{1}{2} (|0011\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1100\rangle)$
- $|g_{14}\rangle = \frac{1}{2} (|0011\rangle + |0110\rangle - |1001\rangle - |1100\rangle)$
- $|g_{15}\rangle = \frac{1}{2} (|0011\rangle - |0110\rangle + |1001\rangle - |1100\rangle)$
- $|g_{16}\rangle = \frac{1}{2} (|0011\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle + |1100\rangle)$

# Teleportation zweier Qubits

## Teleportationsablauf

**Analog zum vorherigen Beispiel werden auch hier die Zustände durch eine BSM verschränkt:**

$$\begin{aligned} |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |g_1\rangle = & \frac{\alpha}{2} \{ |000000\rangle + |000101\rangle + |001010\rangle + |001111\rangle \} \\ & + \frac{\beta}{2} \{ |010000\rangle + |010101\rangle + |011010\rangle + |011111\rangle \} \\ & + \frac{\gamma}{2} \{ |100000\rangle + |100101\rangle + |101010\rangle + |101111\rangle \} \\ & + \frac{\delta}{2} \{ |110000\rangle + |110101\rangle + |111010\rangle + |111111\rangle \} \end{aligned}$$

$$|\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |g_1\rangle = \sum_{i=1}^{16} |g_i\rangle_A |\psi_i\rangle_B \quad \text{mit: } |AAAABB\rangle$$



# Teleportation zweier Qubits

## Transformationstabelle

$ \psi_i\rangle$	Messergebnis A	Transformation B
$ \psi_1\rangle I =  \psi\rangle$	$ g_1\rangle$	$I$
$ \psi_2\rangle \sigma_1^z =  \psi\rangle$	$ g_2\rangle$	$\sigma_1^z$
$ \psi_3\rangle \sigma_2^z =  \psi\rangle$	$ g_3\rangle$	$\sigma_2^z$
$ \psi_4\rangle \sigma_2^z \sigma_1^z =  \psi\rangle$	$ g_4\rangle$	$\sigma_2^z \sigma_1^z$
$ \psi_5\rangle \sigma_2^x =  \psi\rangle$	$ g_5\rangle$	$\sigma_2^x$
$ \psi_6\rangle \sigma_1^z \sigma_2^x =  \psi\rangle$	$ g_6\rangle$	$\sigma_1^z \sigma_2^x$
$ \psi_7\rangle \sigma_2^z \sigma_2^x =  \psi\rangle$	$ g_7\rangle$	$\sigma_2^z \sigma_2^x$
$ \psi_8\rangle \sigma_1^z \sigma_2^z \sigma_2^x =  \psi\rangle$	$ g_8\rangle$	$\sigma_1^z \sigma_2^z \sigma_2^x$

# Teleportation zweier Qubits

## Transformationstabelle

$ \psi_i\rangle$	Messergebnis A	Transformation B
$ \psi_9\rangle \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_9\rangle$	$\sigma_1^x$
$ \psi_{10}\rangle \sigma_1^z \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{10}\rangle$	$\sigma_1^z \sigma_1^x$
$ \psi_{11}\rangle \sigma_2^z \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{11}\rangle$	$\sigma_2^z \sigma_1^x$
$ \psi_{12}\rangle \sigma_2^z \sigma_1^z \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{12}\rangle$	$\sigma_2^z \sigma_1^z \sigma_1^x$
$ \psi_{13}\rangle \sigma_2^x \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{13}\rangle$	$\sigma_2^x \sigma_1^x$
$ \psi_{14}\rangle \sigma_1^z \sigma_2^x \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{14}\rangle$	$\sigma_1^z \sigma_2^x \sigma_1^x$
$ \psi_{15}\rangle \sigma_2^z \sigma_2^x \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{15}\rangle$	$\sigma_2^z \sigma_2^x \sigma_1^x$
$ \psi_{16}\rangle \sigma_2^z \sigma_1^z \sigma_2^x \sigma_1^x =  \psi\rangle$	$ g_{16}\rangle$	$\sigma_2^z \sigma_1^z \sigma_2^x \sigma_1^x$

# Teleportation von N Qubits

## Teleportationsablauf

**Ein-Qubit-Teleportation**  $\longrightarrow$  **Zwei verschränkte Qubits nötig**

**Zwei-Qubit-Teleportation**  $\longrightarrow$  **Vier verschränkte Qubits nötig**

**N-Qubit-Teleportation**  $\longrightarrow$  **2N verschränkte Qubits nötig**

**Wir müssen Bell-Zustände aus 2N Qubits präparieren:**

# Teleportation von N Qubits

## Bell-Zustände

$$\textcircled{1} \quad |s_0\rangle = 2^{-\frac{N}{2}} \sum_{j=0}^{2^N-1} |x_j\rangle_A \otimes |x_j\rangle_B$$

$$\textcircled{2} \quad |s_j\rangle = \otimes_{k=1}^N (\sigma_k^z)^{j_{2k-1}} (\sigma_k^x)^{j_{2k}} |s_0\rangle$$

$$\textcircled{3} \quad U_j = \otimes_{k=1}^N (\sigma_k^z)^{j_{2k-1}} (\sigma_k^x)^{j_{2k}}$$

$x_j$ : Binäre Darstellung der Zahl  $j$

$j_k$  das  $k$ -the Bit (von rechts),  $0 \leq j \leq 2^N - 1$

$k$ : Qubit auf das  $\sigma$  wirkt,  $U_j$ : Bobs unitäre Transformation

# Teleportation von N Qubits

Beispiel Bell-Zustände präparieren für  $N = 2$

$$\begin{aligned} |s_0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 |x_j\rangle_A \otimes |x_j\rangle_B \\ &= \frac{1}{2} (|x_0\rangle_A |x_0\rangle_B + |x_1\rangle_A |x_1\rangle_B + |x_2\rangle_A |x_2\rangle_B + |x_3\rangle_A |x_3\rangle_B) \end{aligned}$$

mit:  $|x_0\rangle = 00$ ,  $|x_1\rangle = 01$ ,  $|x_2\rangle = 10$ ,  $|x_3\rangle = 11$

$$|s_0\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle) = |g_1\rangle$$

( $|g_1\rangle$ ) vgl. Zwei-Qubit-Teleportation)

# Teleportation von N Qubits

Beispiel Bell-Zustände präparieren für  $N = 2$

$$\begin{aligned} |s_j\rangle &= \bigotimes_{k=1}^2 (\sigma_k^z)^{j_{2k-1}} (\sigma_k^x)^{j_{2k}} |s_0\rangle \\ &= \left( (\sigma_1^z)^{j_1} (\sigma_1^x)^{j_2} \otimes (\sigma_2^z)^{j_3} (\sigma_2^x)^{j_4} \right) |s_0\rangle \end{aligned}$$

Nach Übertragung von Alices Messergebnis kann nun Bob die nötige Transformation durchführen und die N-Qubits erhalten.

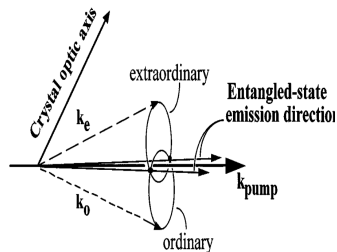
- ① slideshare, 10.07.2018, [www.slideshare.com](http://www.slideshare.com)
- ② D. Bouwmeester, et al., Nature, Vol 390, 1997
- ③ G. Rigolin et al., Phys. Rev., 71, 032303, 2005
- ④ P. Fabritius, nanopdf, 10.07.2018, [www.nanopdf.com](http://www.nanopdf.com)
- ⑤ A. Einstein, et al., Phys. Rev., 47, 777-780, 1935
- ⑥ C. H. Bennet, et al., Phys. Rev., 70, 1895-1900, 1991

**Danke für die  
Aufmerksamkeit!!!**



# Verschränkte Photonen

## Experiment



Erzeugung verschränkter Quanten im nichtlinearen optischen Kristall<sup>3</sup>

<sup>3</sup>D. Bouwmeester, et al, Nature, Vol 390, 11, 1997