Fredag 12.08.05

Oppfriskningskurs i matte

Logaritmereglene

1) $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$

2) $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

3) $\ln(u^x) = x \cdot \ln u$

og

$\ln e^x = x$

$e^{\ln y} = y$

<u>Oppg</u> Løs ligningen

$$\ln x = 2 + \ln 3$$

<u>Løs</u> Ta "e opphøyet i" på begge sider:

$$e^{\ln x} = e^{(2+\ln 3)} \leftarrow \text{NB!}$$

$$x = e^2 \cdot e^{\ln 3} = e^2 \cdot 3 = \underline{\underline{3e^2}}$$

eller

$$\ln x = 2 + \ln 3$$

$$\ln x - \ln 3 = 2$$

$$\ln\left(\frac{x}{3}\right) = 2 \implies e^{\ln \frac{x}{3}} = e^2$$

$$\frac{x}{3} = e^2 \implies \underline{\underline{x = 3e^2}}$$

<u>Omgjøre a^x til e^{kx}</u> der k er en konst

Sett $t = a^x$ og husk $t = e^{\ln t}$. Får

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$$. dvs

$$\boxed{a^x = e^{x \cdot \ln a}}$$

EKS a) $2^x = \underline{\underline{e^{x \ln 2}}}$

b) Vet $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

Vil bruke dette og kjerneregelen til å vise

$$y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

LØS.

$$y = a^x = \underline{e^{x \cdot \ln a}} = e^u \;,\quad u = x \cdot \ln a$$

$$y' = e^u \cdot u' = \underline{e^{x \cdot \ln a}} \cdot \ln a = \underline{\underline{a^x \cdot \ln a}}$$

TRIGONOMETRI (sin, cos, tan)

Har en rettvinklet trekant

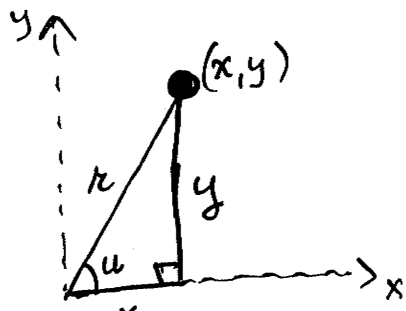


FIG 1

y = motstående katet til u

x = hosliggende katet

r = hypotenus

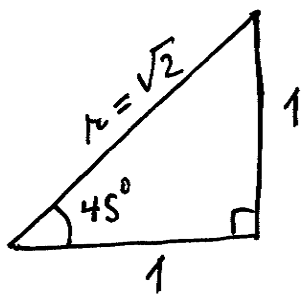
Pythagoras : $\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$

DEF

$$\sin u = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos u = \frac{x}{r} \;,\quad \tan u = \frac{y}{x}$$

EKS Vil finne $\sin 45°$, $\cos 45°$ og $\tan 45°$



$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

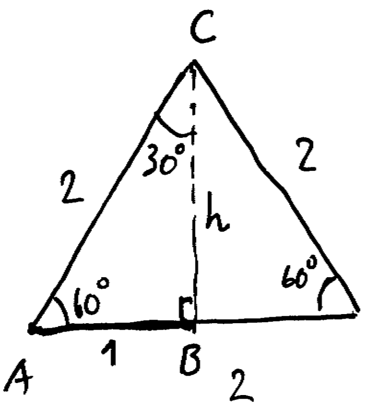
$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$\tan 45° = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

EKS

Ser på trekanten ABC



$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\sin 30° = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, $\cos 30° = \frac{h}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

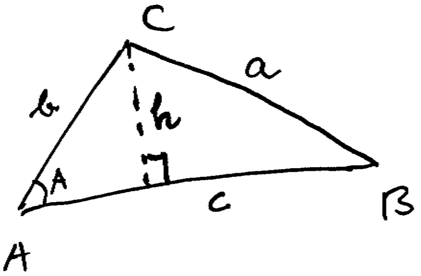
$\sin 60° = \frac{h}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$, $\cos 60° = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, $\tan 60° = \frac{h}{1} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

Får

u	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin u$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos u$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan u$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

sin, cos og tan benyttes til beregning av sider, vinkler og arealer i vilkårlige trekanter m.m.

Arealet F av trekanten ABC:



(1) $\boxed{F = \frac{1}{2} bc \sin A}$ Tils

(2) $\boxed{F = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B}$ Begrunner bare (1)

Må finne h. Vet $\sin A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin A$

Får $F \underset{(\text{vet})}{=} \frac{1}{2} c \cdot h = \underline{\underline{\frac{1}{2} c \cdot b \sin A}}$ OK

Sinussetningen

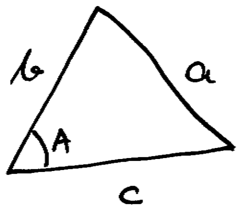
$$\boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}}$$

begrunner. Av (2):

$$\cancel{a} b \sin C = \cancel{a} c \sin B \Rightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$ Ok

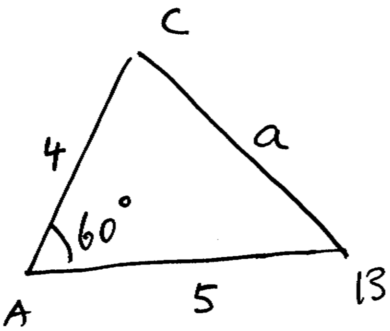
Cosinussetningen

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$



NB! Hvis $A = 90^\circ$, så får vi Pythagoras

Oppgave



a) Finn areal.

b) Finn a

c) Finn vinklene B og C

LØSN

a) $F = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 \sin 60^\circ = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{5\sqrt{3}}}$

b) $a^2 = 4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cos 60^\circ = 16+25-40\cdot\frac{1}{2} = 21$

$a = \underline{\underline{\sqrt{21}}}$

c) $\frac{\sin C}{5} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{21}} \Rightarrow \sin C = \frac{5\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$

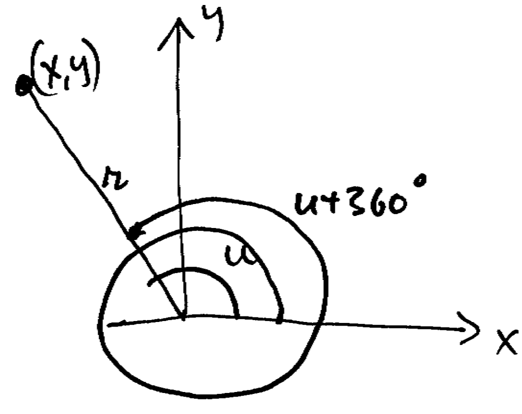
$\Rightarrow C = 70.9^\circ$ (kalk.). Videre

$B = 180^\circ - (60^\circ + 70.9^\circ) = \underline{\underline{49.1^\circ}}$

NB! Hvis vi i FIG 1 stipler en x- og y-akse og lar (x,y) være koordinatene til •, så blir x og y katetene i den trekanten vi tegnet i FIG 1. Def. av $\sin u$, $\cos u$, $\tan u$ kan da benyttes også når $u > 90°$,

f. eks hvis u er som på FIG 2, så gjelder

$$\boxed{\begin{aligned} \sin u &= \frac{y}{r} \\ \cos u &= \frac{x}{r} \\ \tan u &= y/x \end{aligned}}$$



Setning 1

a) sin, cos og tan forandres ikke om vi legger ~~til~~ 360° til u, f. eks

$$\sin(u) = \sin(u+360°)$$

b) Videre

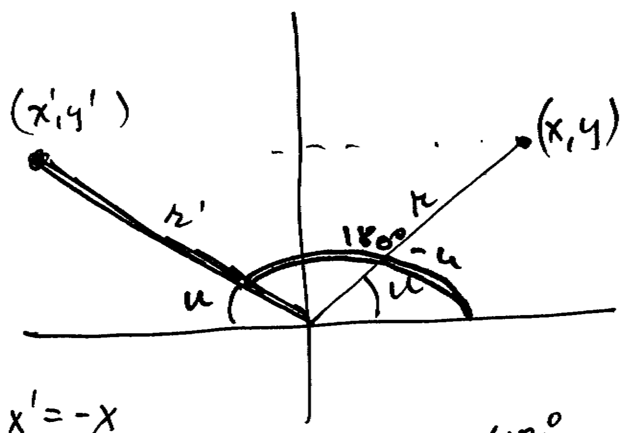
$$\sin u = \sin(180° - u)$$
$$\cos u = \cos(360° - u)$$

Hvorfor gjelder f. eks

Av def:

$$\sin u = \frac{y}{r}$$

$$\sin(180° - u) = \frac{y'}{r'}$$



Av sym: $r = r'$, $y = y'$, $x' = -x$ $\Rightarrow$ $\sin u = \sin(180° - u)$ er OK

⑥

Setning 2

a) $\sin u = \sin v \iff \begin{matrix} u = v + n \cdot 360^\circ \\ u = 180^\circ - v + n \cdot 360^\circ \end{matrix}$

b) $\cos u = \cos v \iff \begin{matrix} u = v + n \cdot 360^\circ \\ u = 360^\circ - v + n \cdot 360^\circ \end{matrix}$

c) $\tan u = \tan v \iff u = v + n \cdot 180^\circ$

(her er n et helt tall)

Oppgave Løs

a) $2\sin x - 1 = 0 \iff 2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $(= \sin 30^\circ)$ $\iff$

$\underline{\underline{x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ}}$ og $x = 180^\circ - 30^\circ + n \cdot 360^\circ$

$\underline{\underline{x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ}}$

b) $3\cos x + 2 = \cos x + 3$

$3\cos x - \cos x = 3 - 2$

$2\cos x = 1 \iff \underline{\cos x} = \frac{1}{2}$ $(= \underline{\cos 60^\circ})$

Får

$x = \underline{\underline{60^\circ + n \cdot 360^\circ}}$, $x = 360^\circ - 60^\circ + n \cdot 360^\circ = \underline{\underline{300^\circ + n \cdot 360^\circ}}$

c) $\tan x = 1$ $(= \tan 45^\circ) \iff$

$x = \underline{\underline{45^\circ + n \cdot 180^\circ}}$

Oppgave Løs

$2\sin x - 1 = 0$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Løs $\sin x = \frac{1}{2} \iff \underline{\underline{x = 30^\circ}}$, $x = 180^\circ - 30^\circ = \underline{\underline{150^\circ}}$

Setn. 3

a) $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

b) $\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

c) $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

d) $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

EKS Vil finne $\sin 75^\circ$ eksakt

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3 \cdot 2}$$
$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

Setn. 4

Følgende formler er VIKTIGE

① $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

② $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

③ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

④ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(og $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$)

⑤ $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

⑥ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

⑦ $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Begrunner (7) ⑧

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}$$ ok

Oppg La x være en spiss vinkel som oppfyller $\tan x = 2$. Finn de eksakte verdiene av $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ og $\cos 2x$.

Løs Av ⑦

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{1+4} = \underline{\frac{1}{5}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}}$$

Av ① : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \implies$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

Av ③

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

Av ④ :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$= \frac{5}{25} - \frac{4 \cdot 5}{25} = \frac{-15}{25} = \underline{\underline{-\frac{3}{5}}}$$