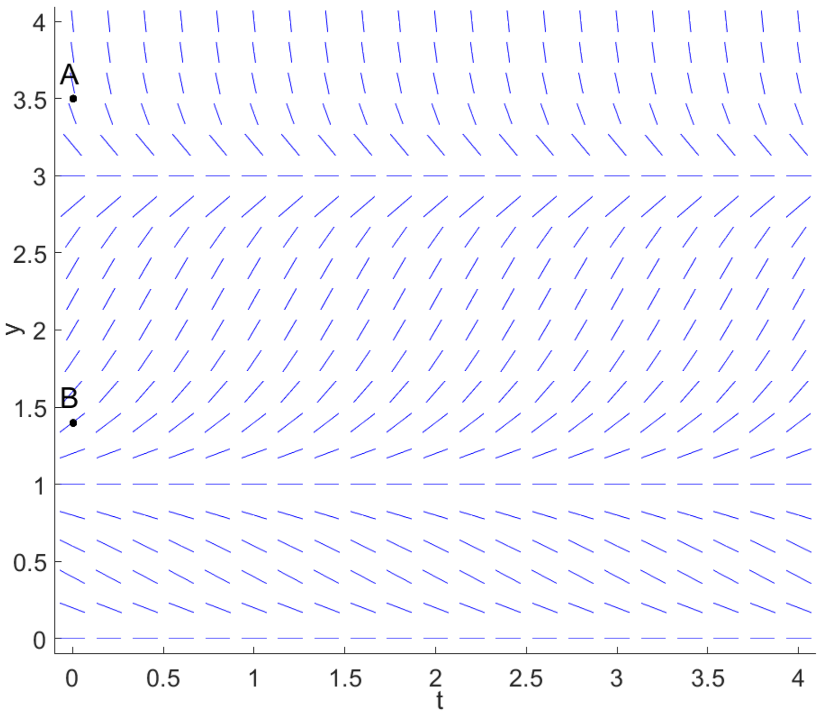
Innlevering	BYFE DAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 6
Innleveringsfrist	Fredag 6. mai 2016 kl 14
Antall oppgaver:	7

Løsningsforslag

1



Retningsfeltet til en differensialligning $y' = f(t, y)$ er vist i figuren. Differensialligningen kan beskrive utviklingen til en dyrebestand (i antall tusen dyr).

Hva skjer med bestanden i det lange løp dersom vi starter i punktet A? Hva om vi starter i B? Hva vil skje, i følge modellen, dersom bestanden synker under 1000 dyr? Begrunn svarene.

LF: I punktet A er den deriverte negativ, dvs løsningen er avtagende. Når den nærmer seg $y = 3000$ går den deriverte mot 0 og løsningen konvergerer mot 3000. Tilsvarende er den deriverte positiv i punktet B, dvs løsningen er voksende. Når den nærmer seg $y = 3000$ går den deriverte mot 0 og løsningen konvergerer mot 3000 også her. Dersom bestanden synker under 1000 dyr blir den deriverte negativ og løsningen avtar mot 0. Dvs bestanden blir etterhvert utryddet.

2

a) Bestem Taylor-polynomet av grad 4 til $\cos(2x)$ omkring 0.

LF: Taylor-polynomet av grad 4 omkring 0 er generelt

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \frac{1}{24}f^{(iv)}(0)x^4.$$

Her er $f'(x) = -2\sin(2x)$, $f''(x) = -4\cos(2x)$, $f'''(x) = 8\sin(2x)$ og $f^{(iv)}(x) = 16\cos(2x)$. Dermed er

$$p_4(x) = 1 + \frac{1}{2}(-4)x^2 + \frac{1}{24}16x^4 = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$$

b) Bruk polynomet fra a) til å beregne grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}.$$

LF: I grensen $x \to 0$ kan vi erstatte telleren med Taylor-polynomet av grad 4. Dermed

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-\frac{2}{3}x^4}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2-\frac{2}{3}x^2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3

a) Bestem Taylor-polynomet av grad 2 til $\sqrt{x}$ omkring $x_0 = 16$.

LF: Taylor-polynomet av grad 2 omkring $x = x_0$ er generelt

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Her er $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{16} = 4$, $f'(x_0) = x_0^{-1/2}/2 = 1/8$, $f''(x_0) = -x_0^{-3/2}/4 = -1/(4 \times 16 \times 4) = -1/256$, dvs

$$p_4(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{2 \times 256}(x-16)^2.$$

b) Bruk polynomet fra a) til å beregne en tilnærmet verdi for $\sqrt{18}$.

LF: En tilnærmet verdi er $p_4(18) = 4 + \frac{1}{4} - \frac{4}{2\times 256} = 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128} \approx 4,2422$. Matlab får $\sqrt{18} = 4,2426$.

4

Sett opp en differensiallikning for kurver gitt ved en funksjon $y(x)$ med følgende egenskaper: Kvadratet av stigningstallet til tangenten til kurven i punktet $(x, y(x))$ er lik stigningstallet til linjen som går gjennom origo og punktet $(x, y(x))$.

LF: Betingelsene til kurven sier at

$$(y')^2 = \frac{y}{x}.$$

Dette er en separabel differensiallikning. Vi separerer variablene og integrerer

$$\int \frac{y'}{\sqrt{y}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

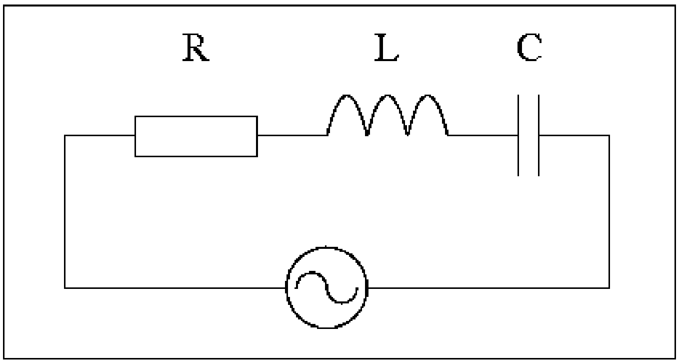
$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$$

Løsningene er derfor på formen

$$y(x) = \underline{(\sqrt{x} + C)^2}$$

for konstanter C.

5



Figuren viser en RLC-krets med strømtilførsel. Den elektriske ladningen i kretsen kan beskrives ved

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{V_0}{C}\cos(\omega t).$$

I oppgaven settes $R/L = 1$, $1/LC = 4$.

a) Bestem generell løsning $q(t)$ når $V_0 = 0$. Hva skjer med løsningen når $t \to \infty$?

LF: Karakteristisk ligning er, når $R/L = 1$, $1/LC = 4$:

$$r^2 + r + 4 = 0,$$

som har røtter

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i.$$

Siden røttene er komplekse, dvs på formen $a+bi$, er generell løsning

$$q(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C\cos(\frac{\sqrt{15}}{2}t) + D\sin(\frac{\sqrt{15}}{2}t)).$$

Pga faktoren $e^{-\frac{1}{2}t}$ som går mot 0 når $t \to \infty$ vil $q(t)$ også gå mot 0 når $t \to \infty$.

b) Vis at en partikulær løsning når $V_0/C = 1$ er

$$q_P(t) = \frac{4-\omega^2}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\sin(\omega t)$$

og skriv opp generell generell løsning når $V_0/C = 1$.

LF: Metode 1: Setter vi inn i venstre side i differensialligningen og bruker at $q_P'' = -\omega^2 q_P$ får vi

$$\text{Vs} = \left(4-\omega^2\right)q_P - \omega\frac{4-\omega^2}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\sin(\omega t) + \omega\frac{\omega}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\cos(\omega t)$$

slik at

$$\text{Vs} = \frac{\left(4-\omega^2\right)^2+\omega^2}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\cos(\omega t) + \frac{(4-\omega^2)\omega - \omega(4-\omega^2)}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\sin(\omega t) = \cos(\omega t).$$

Dvs Vs = Hs og q_P er partikulærløsning. Metode 2: Prøv $q_P = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ og sett inn i venstre side i differensialligningen. Da får vi etterhvert

$$A = \frac{4-\omega^2}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}, \quad B = \frac{\omega}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}.$$

Generell løsning er da:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_H(t) + q_P(t) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}\left(C\cos(\frac{\sqrt{15}}{2}t) + D\sin(\frac{\sqrt{15}}{2}t)\right) \\ &\quad + \frac{4-\omega^2}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\sin(\omega t). \end{aligned}$$

c) Hva blir amplituden til q_P? (Hint: Amplituden C kan bestemmes ved å skrive q_P som $C\cos(\omega t + \alpha)$). For hvilken verdi av ω blir amplituden størst?

LF: En sum $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ kan skrives $C\cos(\omega t+\alpha)$ med $C = \sqrt{A^2+B^2}$. Dvs

$$C = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\left(\frac{4-\omega^2}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega^2+(4-\omega^2)^2}\right)^2} = \frac{1}{\omega^2+\left(4-\omega^2\right)^2}.$$

Amplituden er størst når nevner er minst, dvs vi må minimere funksjonen $g(\omega) = \omega^2 + \left(4-\omega^2\right)^2$. Deriverer og får $\omega = \sqrt{7/2}$.

6

Oppgave 5 eksamen februar 2014:

Temperaturen i et ganske dårlig isolert lokale varierer med tida. Vi går ut fra at temeraturen er den same i hele lokalet og lar $T(t)$ være denne temperaturen, målt i Celcius-grader, etter t timer. Der er en ovn i lokalet som bidrar til å øke temperatruen. Ut fra blant annet Newtons avkjølingslov setter vi opp denne modellen:

$$T'(t) = -k(T(t) - T_{\text{ute}}) + P, \quad \text{med initialkravet} \quad T(0) = 22 \quad ,$$

der $k = 0.1$ og $T_{\text{ute}} = 10$ er ute-temperaturen (i °C), som vi går ut fra er konstant. P er proporsjonal med effekten til ovnen.

a) For at temperaturen skal holde seg på 22°C, hva må P vere?
(*Hint: Det er ikke nødvendig å løse differensiallikninga for å finne svaret på dette spørsmålet.*)

b) Løs initialverdiproblemet for $P = 0.5$. Initialkravet er det same som over, $T(0) = 22$.

c) Noen måneder senere bestemmer en seg for å isolere lokalet bedre. I vår modell fører dette til at vi må endre verdien for k. En dag etter at de har isolert viser det seg at temperaturen i lokalet faller fra 22°C til 16°C på 10 timer. Ovnen var slått av ($P = 0$) og utetemperaturen var 8°C i denne perioden.
Bruk disse opplysningene til å bestemme den nye k-verdien.

7

Oppgave 11 eksamen august 2015:

Finn alle løsningene til differensiallikningene og initialverdiproblemene

$$a) \quad y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

$$b) \quad y'' - 4y' = e^{2x} + 1$$

LF: Løsningsforslag til eksamensoppgavene ligger på hjemmesiden til kurset.