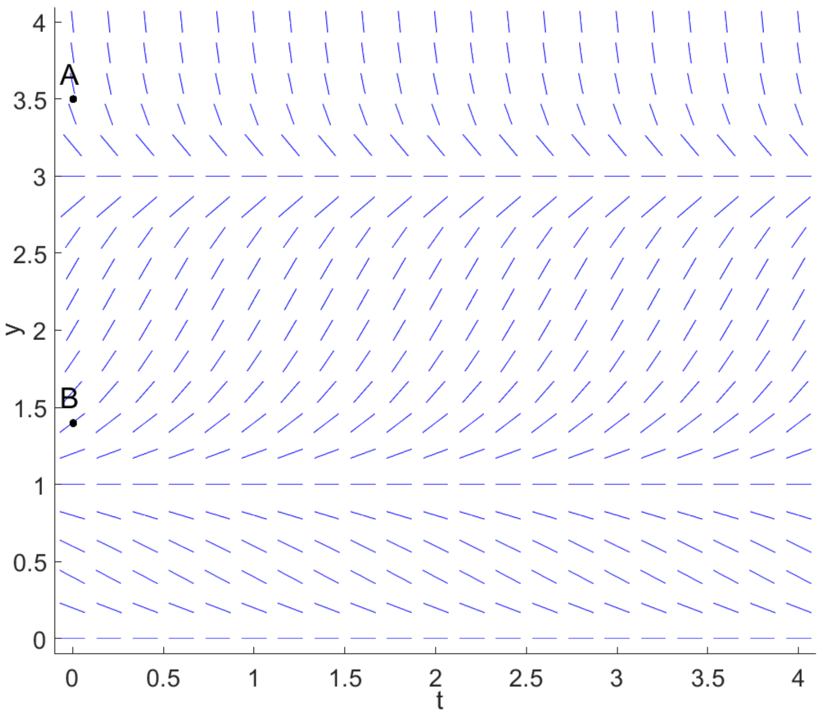
Innlevering BYFE DAFE Matematikk 1000 HIOA
Obligatorisk innlevering 6

Innleveringsfrist Fredag 6. mai 2016 kl 14

Antall oppgaver: 7

1



Retningsfeltet til en differensialligning $y' = f(t, y)$ er vist i figuren. Differensialligningen kan beskrive utviklingen til en dyrebestand (i antall tusen dyr).

Hva skjer med bestanden i det lange løp dersom vi starter i punktet A? Hva om vi starter i B? Hva vil skje, i følge modellen, dersom bestanden synker under 1000 dyr? Begrunn svarene.

2

a) Bestem Taylor-polynomet av grad 4 til $\cos(2x)$ omkring 0.

b) Bruk polynomet fra a) til å beregne grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}.$$

3

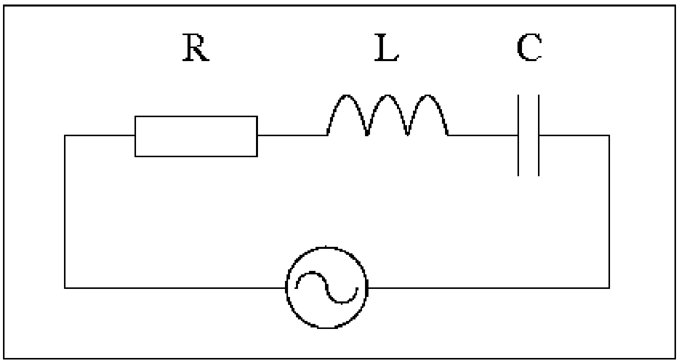
a) Bestem Taylor-polynomet av grad 2 til $\sqrt{x}$ omkring $x_0 = 16$.

b) Bruk polynomet fra a) til å beregne en tilnærmet verdi for $\sqrt{18}$.

4

Sett opp en differensiallikning for kurver gitt ved en funksjon $y(x)$ med følgende egenskaper: Kvadratet av stigningstallet til tangenten til kurven i punktet $(x, y(x))$ er lik stigningstallet til linjen som går gjennom origo og punktet $(x, y(x))$.

5



Figuren viser en RLC-krets med strømtilførsel. Den elektriske ladningen i kretsen kan beskrives ved

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{V_0}{C}\cos(\omega t).$$

I oppgaven settes $R/L = 1$, $1/LC = 4$.

a) Bestem generell løsning $q(t)$ når $V_0 = 0$. Hva skjer med løsningen når $t \to \infty$?

b) Vis at en partikulær løsning når $V_0/C = 1$ er

$$q_P(t) = \frac{4-\omega^2}{\omega^2 + (4-\omega^2)^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^2 + (4-\omega^2)^2}\sin(\omega t)$$

og skriv opp generell generell løsning når $V_0/C = 1$.

c) Hva blir amplituden til q_P? (Hint: Amplituden C kan bestemmes ved å skrive q_P som $C\cos(\omega t + \alpha)$). For hvilken verdi av ω blir amplituden størst?

6

Oppgave 5 eksamen februar 2014:

Temperaturen i et ganske dårlig isolert lokale varierer med tida. Vi går ut fra at temeraturen er den same i hele lokalet og lar $T(t)$ være denne temperaturen, målt i Celcius-grader, etter t timer. Der er en ovn i lokalet som bidrar til å øke temperatruen. Ut fra blant annet Newtons avkjølingslov setter vi opp denne modellen:

$$T'(t) = -k(T(t) - T_{\text{ute}}) + P, \quad \text{med initialkravet} \quad T(0) = 22 \quad ,$$

der $k = 0.1$ og $T_{\text{ute}} = 10$ er ute-temperaturen (i °C), som vi går ut fra er konstant. P er proporsjonal med effekten til ovnen.

a) For at temperaturen skal holde seg på 22°C, hva må P vere?
(*Hint: Det er ikke nødvendig å løse differensiallikninga for å finne svaret på dette spørsmålet.*)

b) Løs initialverdiproblemet for $P = 0.5$. Initialkravet er det same som over, $T(0) = 22$.

c) Noen måneder senere bestemmer en seg for å isolere lokalet bedre. I vår modell fører dette til at vi må endre verdien for k. En dag etter at de har isolert viser det seg at temperaturen i lokalet faller fra 22°C til 16°C på 10 timer. Ovnen var slått av ($P = 0$) og utetemperaturen var 8°C i denne perioden.

Bruk disse opplysningene til å bestemme den nye k-verdien.

7

Oppgave 11 eksamen august 2015:

Finn alle løsningene til differensiallikningene og initialverdiproblemene

$$a) \quad y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

$$b) \quad y'' - 4y' = e^{2x} + 1$$