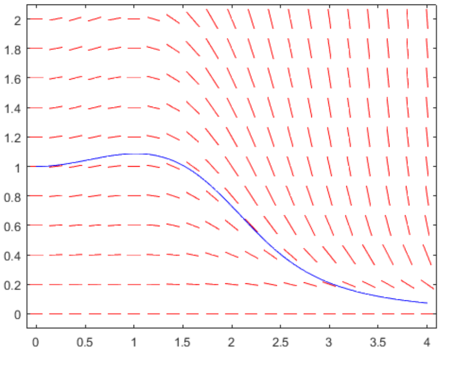
Oppsummering 6/4

Retningsfelt

En måte å presentere differensialligninger

Små rette linjer (piler) fordelt utover planet angir hvor raskt løsningen endrer seg.



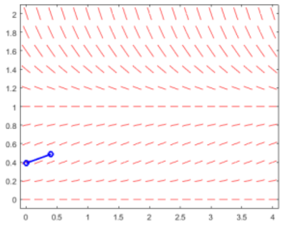
Numerisk løsning av $y' = F(x, y)$ og startverdi $y(x_0) = y_0$ ved Eulers metode

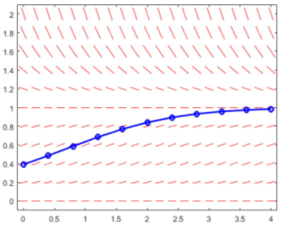
Lineariserer i startpunktet:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

Dette gir $y(x_1) \approx y_0 + F(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ dersom $x_1 - x_0$ er liten.

Visualisering av Eulers metode i retningsfelt:





Generelt, når vi har beregnet $y_1, y_2, \dots, y_n$ kan vi bestemme y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n)$$

Separable differensialligninger

En differensialligning på formen

$$q(y)y' = p(x)$$

kalles *separabel.* Den kan skrives om til

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx$$

slik at løsningen bestemmes ved antiderivasjon.

Oppgave

Oppgave: Løs

$$e^x y y' = 1 + y^2.$$

Løsning: Differensialligningen kan skrives på formen

$$\frac{y}{1+y^2} y' = e^{-x}.$$

Dvs den er separabel slik at

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int e^{-x} dx.$$

Oppgave

Deloppgave: Regn ut

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy \text{ og } \int e^{-x} dx$$

Løsning: Substitusjon med $u = 1 + y^2$ gir

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{y}{u} \frac{du}{2y} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C_1 = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + C_1$$

Substitusjon med $u = -x$ gir

$$\int e^{-x} dx = \int e^u \frac{du}{-1} = -e^u + C_2 = -e^{-x} + C_2.$$

Dermed, med $C_3 = C_2 - C_1$, er

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = -e^{-x} + C_3$$

slik at

$$1 + y^2 = e^{-2e^{-x} + 2C_3} = Ce^{-2e^{-x}}, C = e^{2C_3},$$

$$y(x) = \pm\sqrt{Ce^{-2e^{-x}} - 1}$$

Førsteordens lineær differensialligning

Er på formen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Løses ved først å multiplisere med *integrerende faktor* $h(x)$

$$h(x)y' + h(x)f(x)y = h(x)g(x)$$

og så observere at venstre side er den deriverte av produktet $h(x)y$ dersom $h' = hf(x)$ (separabel differensialligning med løsning $h(x) = e^{\int f(x)dx}$).

Førsteordens lineær differensialligning

Altså:

$$[h(x)y]' = h(x)g(x),$$

Som løses ved antiderivasjon:

$$h(x)y = \int h(x)g(x)dx$$

slik at

$$y = \frac{1}{h(x)} \int h(x)g(x)dx$$

Tips til oblig: bruk av Matlab til å beregne integralet $\int_a^b f(x)dx$

Simpson.m:

```
a=-2 ;
b=3 ;

N=4;
f = @(x) x^3;

M=zeros(N,2);
format long
for j=1:N
    n=5 *10^j;  %Antall delintervaller.
    d=(b-a)/n;  %Bredden på delintervallene.
    S=0; T=0;
    for i=0:n-1
        S=S+(f(a+i*d) + 4*f(a+(i+0.5)*d) + f(a+(i+1)*d))*d/6;
        T=T+ d*(f(a+ i*d) + f(a+(i+1)*d))/2;
    end
    M(j,1)=T;
    M(j,2)=S;
end
M
```

$$\int_a^b f(x)dx$$

Tips til oblig: bruk av Matlab til å løse differensialligningen $y' = F(x,y), y(a) = c$ på (a,b)

Eulerm.m:

```
a=0.0;
b=5;
c=1;  %Startverdi for y
M=4;  %Den fineste oppdelingen er i 10^M intervaller

F = @(x,y) -x/y ;

hold off
for i=1:M
    N=10^i;
    d=(b-a)/N;

    x=a:d:b ;
    y=zeros(1,N+1) ;

    y(1)=c ;

    for n=1:N
        y(n+1) = y(n) + F(x(n), y(n))*d ;
    end
    plot(x,y,'color', [1.5^(1-i),0,1.5^(i-M)])
    %Kurven basert på lavest antall delintervaller er
    %rød, kurven blir mer blå jo finere oppdelingen er.
    hold on
end
```

$$y' = F(x,y), y(a) = c$$

Oppgave /eksempel

Løs differensialligningen

$$y' - 2y = e^x .$$

* Hva slags differensialligning er dette?
* Hvordan løses slike differensialligninger?

Førsteordens lineær differensialligning.
Multipliserer med IF (integrerende faktor):

$$\underbrace{h(x)y' - 2\cdot h(x)y}_{[h(x)\cdot y]' = h(x)\cdot y' + h'(x)y} = h(x)e^x$$

$$\Rightarrow h' = -2h$$

$$h' = -2h \Rightarrow IF = h(x) = e^{-2x}.$$

$$\Rightarrow [e^{-2x}\cdot y]' = \underbrace{e^{-2x}\cdot e^x}_{= e^{-2x+x} = e^{-x}}$$

Antideriverer hver side:

$$e^{-2x} \cdot y = \int e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x} + C$$

$$y(x) = e^{2x}\left(-e^{-x} + C\right)$$

$$= -e^{2x}e^{-x} + C \cdot e^{2x}$$

$$= -e^{2x-x} + C \cdot e^{2x}$$

$$= -e^{x} + C \cdot e^{2x}$$

$y' - 2y = e^x$ $y' - 2y = 0$

Inhomogen Homogen Differensial-ligning

Partikulær løsning av inhomogen DL

Generell løsning av homogen DL.

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$$

$$y' - 2y = 0 \quad (y' = 2y)$$

Vi ser etter løsninger $y = e^{rx}$:

$$y' = e^{rx} \cdot r$$

$$Vs = y' - 2y = e^{rx} \cdot r - 2e^{rx}$$

$$= e^{rx}(r-2)$$

$$Hs = 0$$

$Vs = Hs$:

$$\underbrace{e^{rx}}_{>0}(r-2) = 0$$

$$\underline{r = 2}$$

Dvs $\underline{y(x) = Ce^{2x}}$

Homogene andreordens lineære differensialligninger med konstante koeffisienter (4.9)

En generell andreordens lineær DL:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

$h(x) = 0$: Homogen

$h(x) \neq 0$: Inhomogen

Konstante koeffisienter og homogen:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Vi ser etter løsninger $y = e^{rx}$:

$$y' = e^{rx} \cdot r$$

$$y'' = (e^{rx} \cdot r)' = (e^{rx})' \cdot r = e^{rx} r^2$$

Setter inn i DL:

$$Vs = y'' + py' + qy$$

$$= e^{rx} \cdot r^2 + p \cdot e^{rx} \cdot r + q \cdot e^{rx}$$

$$= e^{rx}\left(r^2 + p \cdot r + q\right)$$

$$Hs = 0$$

$Vs = Hs$:

$$\underbrace{e^{rx}}_{>0}\underbrace{\left(r^2 + pr + q\right)}_{=0} = 0$$

$$\boxed{r^2 + pr + q = 0}$$

Den karakteristiske ligninga til

$$y'' + py' + qy = 0$$

Tilfelle 1: To reelle røtter r_1 og r_2:

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

Tilfelle 2: Ēn rot r.

$$y(x) = Ce^{rx} + Dxe^{rx}$$

Tilfelle 3: To komplekse røtter $a \pm ib$

$$y(x) = e^{ax}\left(C\cos(bx) + D\sin(bx)\right)$$

Begrunnelse:

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} \\
&= Ae^{ax}e^{ibx} + Be^{ax}e^{-ibx} \\
&= e^{ax}\Big[A\underbrace{e^{ibx}}_{\cos(bx)+i\sin(bx)} + B\underbrace{e^{-ibx}}_{\cos(bx)-i\sin(bx)}\Big] \\
&\vdots \\
&= e^{ax}\Big(\underbrace{(A+B)}_{C}\cos(bx) + \underbrace{(A-B)i}_{D}\sin(bx)\Big)
\end{aligned}$$

Eksempel (4.9.3)

Finn generell løsning av

$$y'' - y' - 6y = 0$$

Løsning:

Karakteristisk ligning:

$$r^2 - r - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$r_1 = 3, \quad r_2 = -2$$

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

$$= \underline{\underline{Ce^{3x} + De^{-2x}}}$$

Eksempel (4.9.7)

Finn generell løsning av

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

Løsning:

Karaktéristisk ligning:

$$r^2 + 2r + 10 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$\sqrt{-36} = \sqrt{-1}\sqrt{36} = 6i$$

$$= \frac{-2 \pm 6i}{2} = \underbrace{-1}_{a} \pm \underbrace{3i}_{b}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x}\left(C \cdot \cos(3x) + D \cdot \sin(3x)\right)$$

Startverdiproblemer (initialverdiproblemer)

To vilkårlige konstanter C og D.

Eksempel (4.9.9)

Løs

$$y'' + y' - 2y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Finner generell løsning til DL:

Karakteristisk ligning:

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \qquad r_1 = 1, \; r_2 = -2$$

$$y(x) = Ce^{x} + De^{-2x}$$

Vi krever at

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

$$y'(x) = Ce^{x} + De^{-2x}(-2)$$

$y(0)=1$: $Ce^{0} + De^{-2\cdot 0} = 1$

$$C + D = 1$$

$y'(0)=0$: $Ce^{0} + De^{-2\cdot 0}(-2) = 0$

$$C - 2D = 0$$

Dvs $C = \frac{2}{3}$, $D = \frac{1}{3}$ (Sjekk sjøl!)

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$$