Oppsummering 4/4

Hva er en differensialligning?

1. Matematisk: En ligning $F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$
2. Verbalt: En sammenheng mellom variabelen x, funksjonen y og de deriverte til y: $y', y'', \ldots$
3. Modeller:

Dyrebestand: $N'(t) = kN(t)$

Temperatur i omgivelsene

Newtons avkjølingslov: $T'(t) = k(T(t) - \boxed{T_o})$

Torricellis lov $\Rightarrow$ $h'(t) = -\frac{Ak}{\pi r^2}\sqrt{h(t)}$

Løsning av de enkleste differensialligningene

- Differensialligning av typen $y' = f(x)$:
$$y(x) = \int f(x)dx$$
- Differensialligning av typen $y'(x) = ky(x)$:
$$y(x) = Ce^{kx}$$
Med startverdi $y(0) = y_0$ blir $C = y_0$ slik at
$$y(x) = y_0 e^{kx}.$$
- Differensialligning av typen
$$y'(x) = k(y(x) - y_1)$$
Kan løses ved å benytte variabelskiftet
$$u = y - y_1$$
og så erstatte y og y' med u og u'.

Oppgave

1. Bestem y når $y'(x) = -2y(x)$.
2. Finn løsningen som tilfredsstiller $y(0) = 3$.

Løsning:

1. Generell løsning: $y(x) = Ce^{-2x}$.
2. Skal ha $y(0) = 3$: $y(0) = Ce^0 = C$

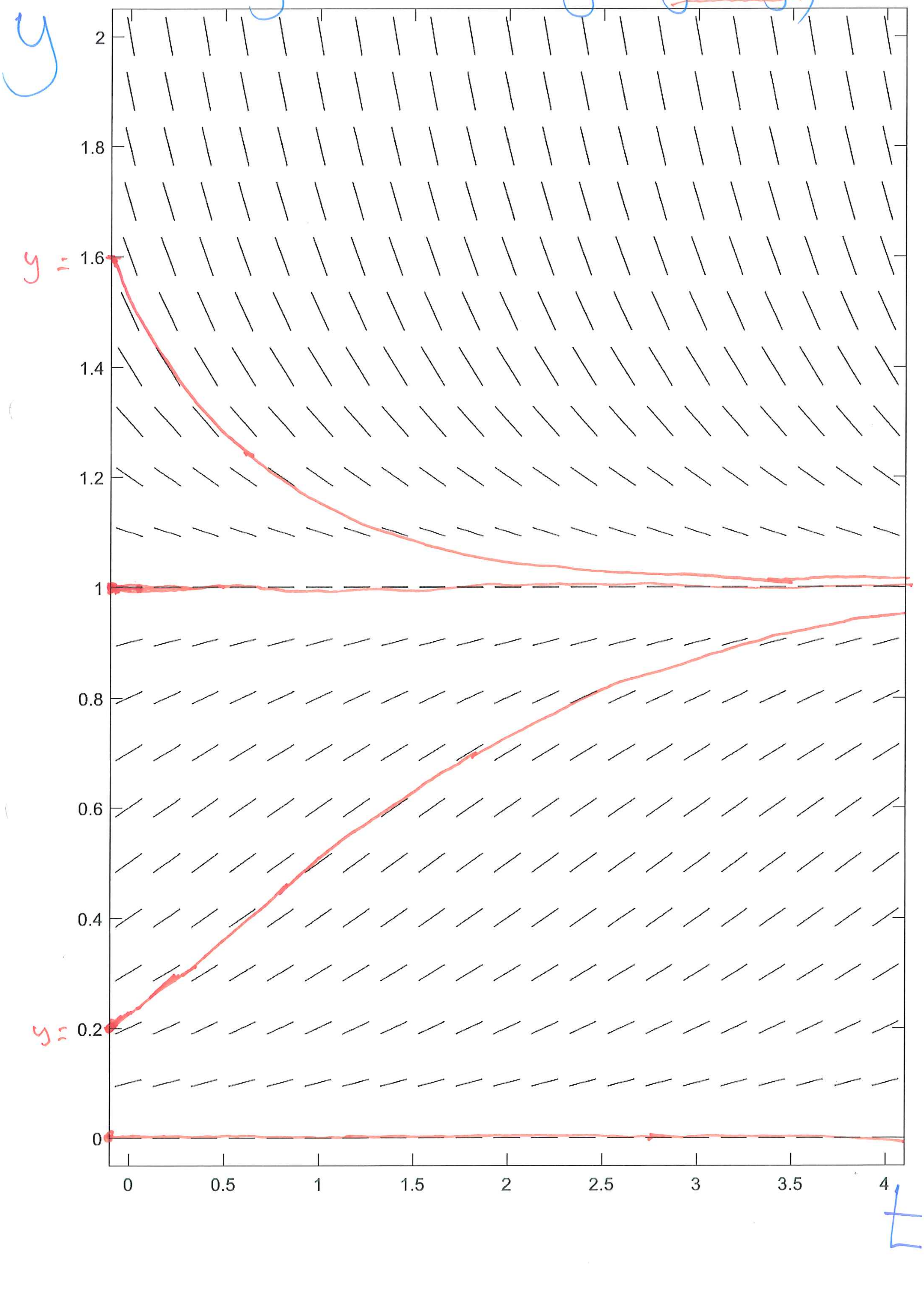
   Dermed: $C = 3$ slik at $y(x) = 3e^{-2x}$.

Differensialligninger som retningsfelt

<u>Eks:</u>

$$y'(t) = y(t)\,(1 - y(t))$$

Retningsfeltet til $y' = y(1-y)$



Tilnærmet $\overset{\text{numerisk}}{\vee}$ løsning av differensialligninger (4.6)

Generelt:

$$y'(x) = F(x,y)$$

Startpunkt: (x_0, y_0)

$$(y(x_0) = y_0).$$

Lineariserer i (x_0, y_0):

$$y - y_0 = \underbrace{y'(x_0)}_{F(x_0,y_0)}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y = y_0 + F(x_0,y_0)(x-x_0)$$

Ønsker å bestemme:

$$y_1 \approx y(x_0+h)$$

$$y_2 \approx y(x_0+2h)$$

$$\vdots$$

$$y_1 \approx y(x_0+h)$$

$$\approx y_0 + F(x_0,y_0)(x_0+h-x_0)$$

ɔ:

$$y_1 = y_0 + F(x_0,y_0)\cdot h$$

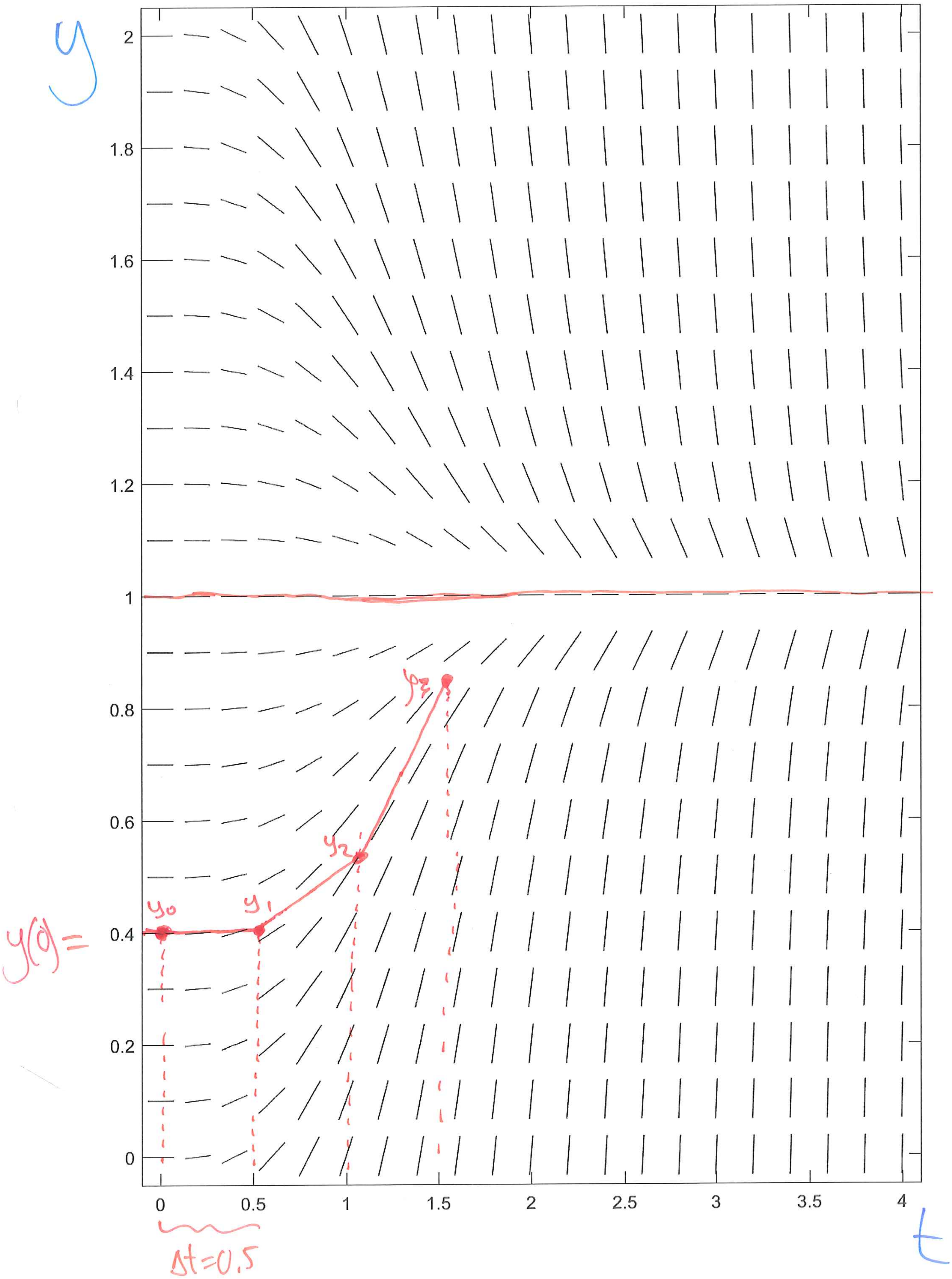
$$y_2 = y_1 + F(x_1,y_1)\cdot h, \quad x_1 = x_0 + h$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n,y_n)\cdot h, \quad x_n = x_0 + n\cdot h.$$

Eulers metode for tilnærmet løsning av differensialligninger.

Eulers metode



Eksempel:

Løs

$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = 1.$$

Dvs: $x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$

Løs med Eulers metode med $h = \frac{1}{4}$

på $[0, 1]$.

Dvs skal bestemme

$$y_1 \approx y(1 \cdot h) = y(\tfrac{1}{4})$$

$$y_2 \approx y(\tfrac{1}{2})$$

$$y_3 \approx y(\tfrac{3}{4})$$

$$y_4 \approx y(1).$$

Her: $F(x,y) = -y$

Dvs. $y_{n+1} = y_n - y_n \cdot h, \quad n = 0,1,2,3.$

$= (1-h)y_n.$

$n=0:\quad y_1 = (1-h)y_0 = 1-h$

$y_2 = (1-h)y_1 = (1-h)^2$

$y_3 = (1-h)^3$

$y_4 = (1-h)^4.$

$0:\quad y_4 = (1-h)^4 = \left(1-\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx \underline{0{,}3164}$

Eksakt løsning:

$$y(x) = e^{-x}$$

$$\Rightarrow y(1) = e^{-1} \approx \underline{0{,}3679}$$

$h=\frac{1}{1000},\ n=1000:\quad y_{1000} \approx \underline{0{,}3677}$

Separable differensialligninger (4.7)

$$\boxed{q(y)\,y' = p(x)}$$

Separabel diff.-ligning

Løsning:

$$q(y)\frac{dy}{dx} = p(x)$$

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$$

Antar at vi har antideriverte $Q(y)$ og $P(x)$:

$$\boxed{Q(y) = P(x) + C}$$

Implisitt løsning av separabel diff. ligning

Eksempel (4.7.1)

Løs

$$e^{-x} y' = 1 + y^2$$

Deler på $1+y^2$:

$$e^{-x} \frac{1}{1+y^2} y' = 1$$

Ganger med e^x:

$$\underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{q(y)} y' = \underbrace{e^x}_{p(x)}$$

Dvs separabel diff. ligning

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int e^x\, dx$$

$$\underbrace{\arctan y = e^x + C}_{\text{Implisitt løsning}}$$

Eksplisitt løsning:

$$\tan(\arctan y) = \tan(e^x + C)$$

$$\underline{y(x) = \tan(e^x + C)}$$

(4.8)

Førsteordens lineære differensialligninger

Generelt:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Eksempel:

$$T'(t) = k(T(t) - T_0)$$

$$T' \underbrace{- k}_{f(t)} T = \underbrace{-kT_0}_{g(t)}$$

Motiverende eksempel (4.8.1)

$$\underbrace{e^{x^2}(y' + 2xy)}_{e^{x^2} \cdot y' + 2x e^{x^2} \cdot y \, = \, \frac{d}{dx}\left[e^{x^2} \cdot y\right]} = xe^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2} \cdot y\right] = xe^{x^2}$$

$$z(x) = e^{x^2} y :$$

$$z' = x e^{x^2}$$

$$z(x) = \underbrace{\int x e^{x^2} dx}$$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Dus $\int x e^{x^2} dx = \int x e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int e^u du$

$$= \frac{1}{2} e^u + C = \underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}$$

$$z(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$e^{x^2} y(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Ganger med e^{-x^2} :

$$\underline{y(x) = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}}$$

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Ganger med integrerende faktor $h(x)$:

$$\underbrace{h(x)y' + h(x)f(x)y}_{\text{Hvordan blir dette } = [\dots]'?} = h(x)g(x)$$

Vi ønsker

$$h(x)y' + \underbrace{h(x)f(x)}_{=}y = [k(x)\cdot y]'$$

$$k(x)y' + k'(x)\,y =$$

Dvs:

$$k(x) = h(x)$$

$$k'(x) = h(x)f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{h'(x) = h(x)f(x)}$$

Separabel!

$$\frac{1}{h}h' = f(x)$$

$$\int \frac{1}{h}\,dh = \int f(x)\,dx$$

$$\ln|h| = \int f(x)\,dx$$

$$e^{\ln|h|} = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$|h(x)| = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\boxed{h(x) = e^{\int f(x)\,dx}}$$

"Formel" for integrerende faktor

Eksempel:

$$y' - \frac{1}{x} y = x \cdot \cos x, \quad y(\pi) = \pi.$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad g(x) = x \cos x$$

Må løse

$$\frac{1}{h} h' = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{h}\, dh = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx$$

$$\ln|h| = -\ln|x| + C$$

$$|h(x)| = e^{-\ln|x| + C}$$

$$h(x) = \pm e^{-\ln|x| + C} \qquad \underbrace{e^{C}}_{k}$$

$$h(x) = \pm k\big(\underbrace{e^{\ln|x|}}_{|x|}\big)^{-1}$$

$$h(x) = \pm \frac{k}{|x|} = \frac{k}{x}$$

Integrerende faktor

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$$

Ganger med $\frac{K}{x}$:

$$\frac{\cancel{K}1}{x}y' - \frac{\cancel{K}1}{x^2}y = \cancel{K}\cos x$$

$$(h(x)y)'$$

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = \cos x$$

$$\frac{1}{x}y = \int \cos x\,dx$$

$$\frac{1}{x}y = \sin x + C$$

$$\underline{y(x) = x\sin x + Cx}$$

$y(\pi)=\pi$: $\quad \pi\cdot\underbrace{\sin\pi}_{=0} + C\cdot\pi = \pi$

$$\Rightarrow \underline{C=1}$$

$$\underline{\underline{y(x) = x\sin x + x}}$$