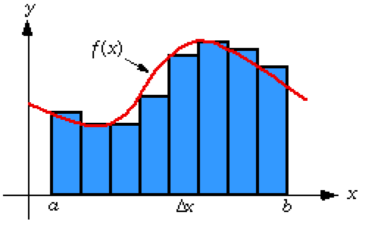
# Oppsummering integrasjon

# Det bestemte integralet

- Riemannsummen:

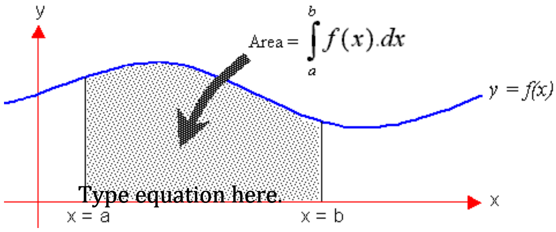
$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$



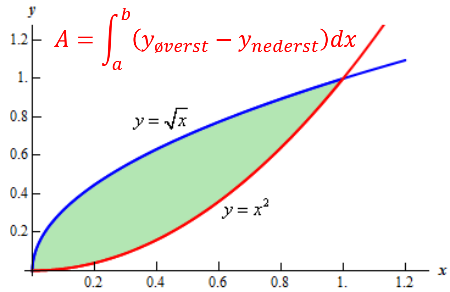

- Det bestemte integralet er grensen av Riemannsummen når $\Delta x$ går mot 0 og antall stolper går mot $\infty$
- Når grensen eksisterer sies funksjonen å være *integrerbar*

# Det bestemte integralet som areal

Areal mellom grafen og *x*-aksen




Areal mellom grafer



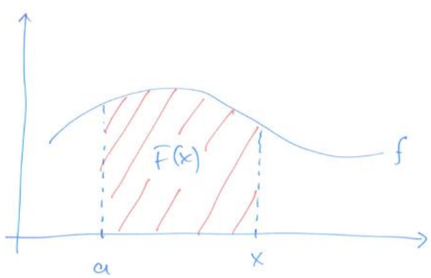

# Analysens fundamentalteorem

Del 1: $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

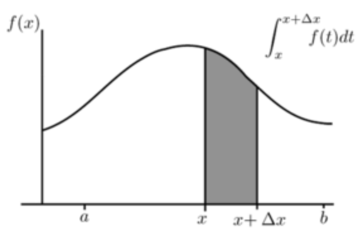
Antiderivert til *f*

Del 2: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

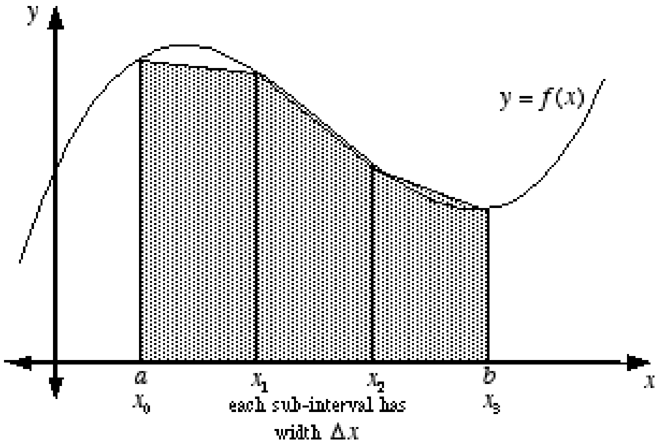
$F(x)$ er et areal:




Grafisk bevis for del 1:
($F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$)



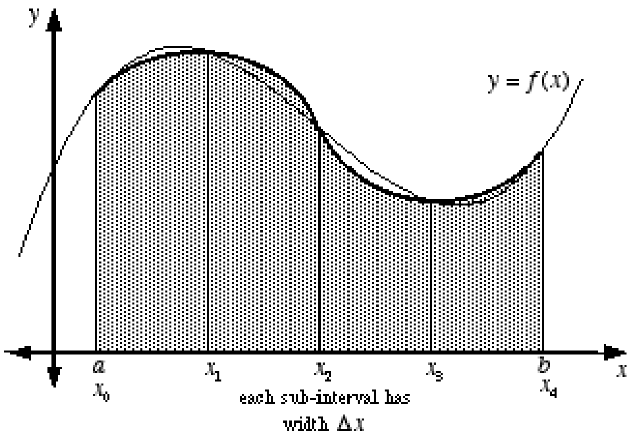
# Numerisk integrasjon: trapesmetoden




The area of the trapezoids (shaded) approximately equals the area bounded by $y = f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\right].$$

# Numerisk integrasjon: Simpsons metode

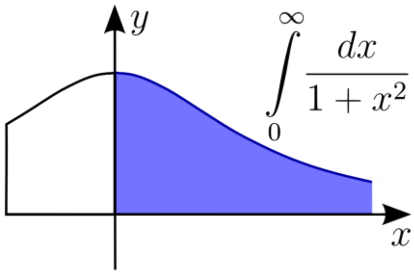



The shaded area bounded by the parabolas (the thicker curves) is approximately equal to the area bounded by $y = f(x)$.

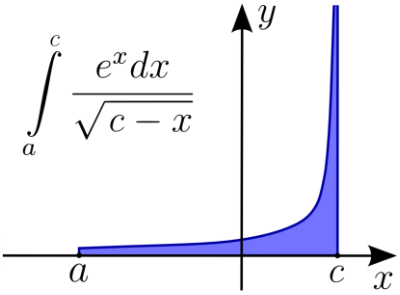
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

# Uegentlige integraler (5.5)

Type 1:
Integrasjonsintervallet er ubegrenset




Type 2:
Integranden er ubegrenset




# Delvis integrasjon

Kan brukes dersom vi har integral på formen

$\int u(x)v'(x)dx$

Produktregelen for derivasjon gir at

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Hensikt: Velg $u(x)$ og $v'(x)$ slik at

$$\int u'(x)v(x)dx$$

er lettere å løse enn

$$\int u(x)v'(x)dx$$

## Eksempel, uegentlig integral+delvis integrasjon

Regn ut $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Løsning:
Dette er et uegentlig integral siden $\ln x$ ikke er definert for $x = 0$.
Merk at $\ln x = 1 \times \ln x$. Vi setter

$u = \ln x$ (slik at $u' = 1/x$), $v' = 1$ (slik at $v = x$).

Dermed:

$$\int 1 \times \ln x \, dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Og

$$\int_0^1 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1 - \lim_{a \to 0}(a \ln a - a) = -1.$$

## Integrasjon ved substitusjon

Integral på formen

$$\int f(u(x))u'(x)dx$$

Ved å identifisere $u(x)$ kan dette skrives

$$\int f(u)du$$

Oppskrift:
1) Velg $u(x)$.
2) Siden $u'(x) = du/dx$, erstattes $dx$ med $du/u'(x)$
3) $x$-ene som er igjen i integranden skrives om til et uttrykk i $u$ og det resulterende integralet løses (hvis mulig, ellers gå tilbake til (1) og prøv på nytt)

# Eksempel, substitusjon

Regn ut $\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$.

Løsning:

Vi setter $u = 1 + x^2$, dvs vi erstatter $dx$ med $\frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{2x}$ slik at

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \int \frac{x^3}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{u} du$$

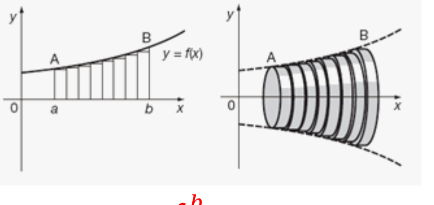
Merk at $x^2 = u - 1$, dvs

$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{u} du = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u} du = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du =$

$\frac{1}{2}(u - \ln u) + C = \frac{1}{2}(1 + x^2 - \ln(1 + x^2)) + C.$

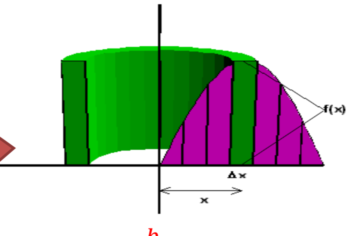
# Volum av omdreiningslegemer

Sirkulær symmetri: vi kan bruke integraler til å beregne volum




$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Rotasjon om *x*-aksen: skivemetoden




Rotasjon om *y*-aksen: sylinderskallmetoden

$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

# Eksempel, omdreining om $x$-aksen

Regn ut volumet til omdreiningslegemet til $f(x) = \sin x$ mellom $x = 0$ og $x = \pi$.

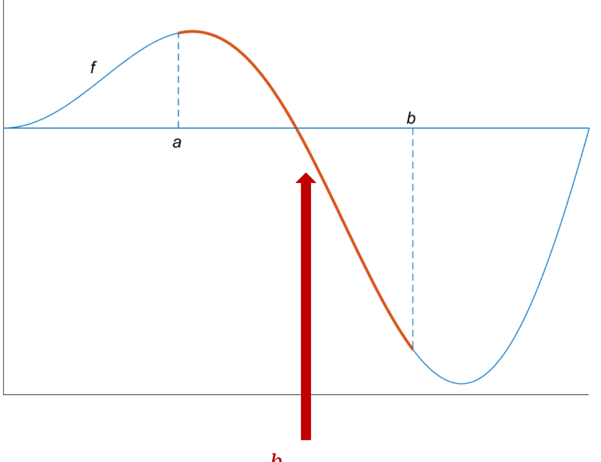
Løsning:

$$V = \pi \int_0^\pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx.$$

Her kan vi skrive $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ slik at

$$V = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{4}.$$

# Buelengde

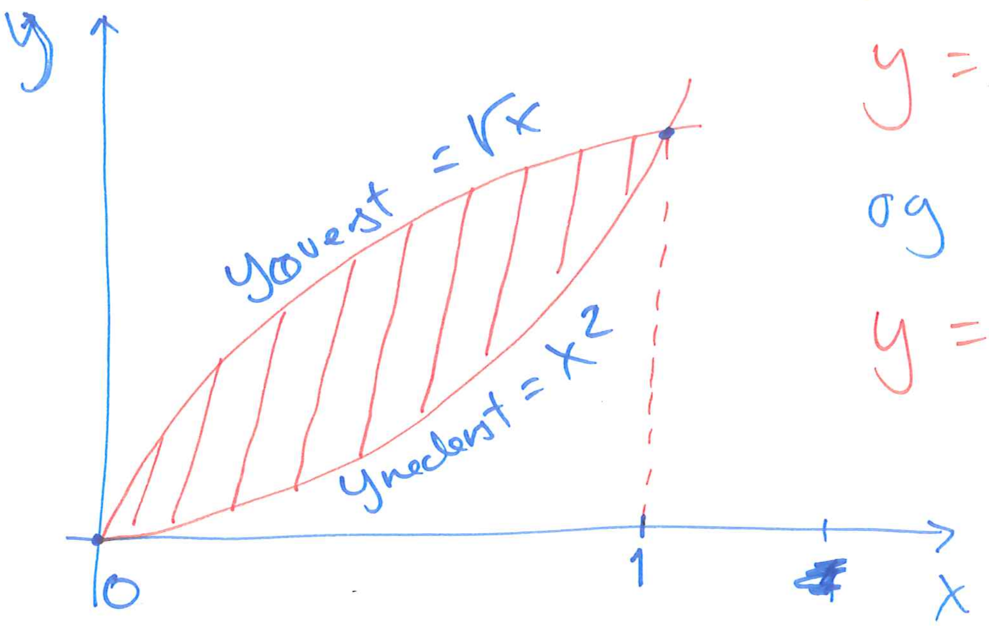



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

# Oppgaver

1. Bestem arealet mellom grafene til $y = \sqrt{x}$ og $y = x^2$ i første kvadrant.
2. Regn ut det samme arealet ved trapesmetoden når intervallet deles opp i fire like brede delintervaller.

# Oppgave 1




Mellom

$y = \sqrt{x}$

og

$y = x^2$

$\sqrt{x} = x^2$ : $x = 0$
$x = 1$

$$A = \int_0^1 (y_{øverst} - y_{nederst})\,dx$$

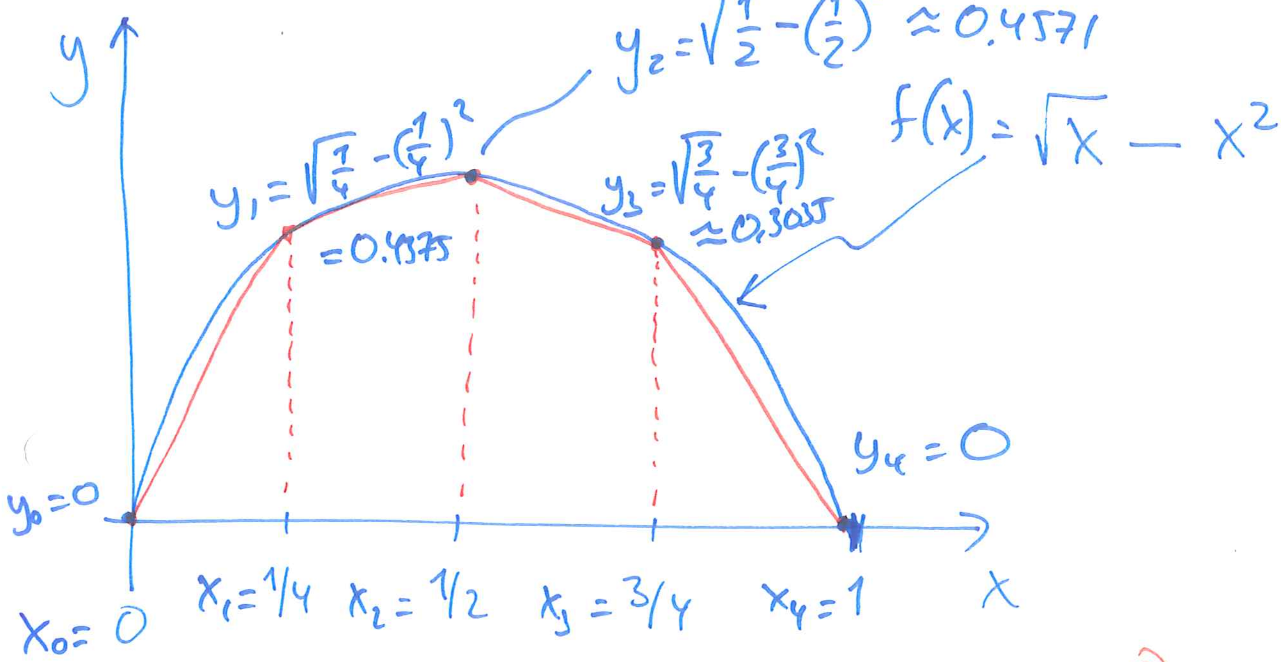
$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1^{3/2} - \frac{1}{3}1^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

# Oppgave 2




$$T_4 = \frac{\Delta x}{2}\left(\overset{0}{\cancel{y_0}} + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \overset{0}{\cancel{y_4}}\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)$$

$$\simeq \frac{1}{4}\left(0.4375 + 0{,}4571 + 0{,}3035\right)$$

$$\simeq \underline{0{,}2995}$$

Sml med $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$

# Delbrøkoppspalting (4.5)

Rasjonale funksjoner:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Polynomer

Vi ønsker å regne ut

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Vi kan skrive $R(x)$ på redusert form v. hj. av polynomdivisjon når graden til $P(x) \geq$ graden til $Q(x)$.

**Eks 1:**

$$R(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Polynomdivisjon:

$$x^3 : (x^2+1) = x + \frac{-x}{x^2+1}$$

$$\frac{-\;x^3 \pm x}{-x}$$

Rest

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \underbrace{\int x\,dx}_{\text{lett } \left(=\frac{1}{2}x^2\right)} - \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{\text{løses ved substitusjon: } u = x^2+1}$$

<u>Eks. 2:</u>

$$R(x) = \frac{x}{2x+1}$$

Polynomdivisjon:

$$x : (2x+1) = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2x+1}$$

$$\frac{-x \pm \frac{1}{2}}{\quad -\frac{1}{2}}$$

Rest $\longrightarrow -\frac{1}{2}$

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{x}{2x+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}\right) dx$$

# Når ~~gradden~~ graden til $P(x) <$ graden til $Q(x)$

## Teorem (4.5.4)

Dersom

$$Q(x) = c(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

Så finnes tall $C_1, C_2, \dots, C_n$ slik at

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x-r_1} + \frac{C_2}{x-r_2} + \dots + \frac{C_n}{x-r_n}$$

Når $n=2$:

$$Q(x) = c(x-r_1)(x-r_2)$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{C_1}{x-r_1} + \frac{C_2}{x-r_2}$$

$$(\Rightarrow \int R(x)\,dx = \int\left(\frac{C_1}{x-r_1} + \frac{C_2}{x-r_2}\right)dx$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$= C_1 \ln|x-r_1| + C_2 \ln|x-r_2| + C_3$$

# Eksempel (4.5.5)

$$R(x) = \frac{x+1}{(x-1)x(x+2)}$$

P(x)

Q(x)

$r_1 = 1$ $\quad x-0$ $\quad r_2 = 0$ $\quad r_3 = -2$

Graden til $P(x) = 1$

—"— $Q(x) = 3$

Dvs. Teorem 4.5.4 gir at

$$R(x) = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x+2}$$

Hva blir $C_1, C_2$ og $C_3$?

$$\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x+2} = \frac{x+1}{(x-1)x(x+2)}$$

Brukes til å bestemme $C_1, C_2, C_3$

$$\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x+2}$$

$$= \frac{C_1 x(x+2)}{(x-1)x(x+2)} + \frac{C_2(x-1)(x+2)}{(x-1)x(x+2)} + \frac{C_3(x-1)x}{(x-1)x(x+2)}$$

$$= \frac{C_1\, x(x+2) + C_2(x-1)(x+2) + C_3(x-1)x}{(x-1)x(x+2)}$$

$$= \frac{C_1 \cdot x^2 + C_1 \cdot 2x + C_2 \cdot x^2 + C_2 \cdot x - 2 \cdot C_2 + C_3 \cdot x^2 - C_3 \cdot x}{(x-1)x(x+2)}$$

$$= \boxed{\frac{x^2(C_1 + C_2 + C_3) + x(2C_1 + C_2 - C_3) + 1 \cdot (-2C_2)}{(x-1)x(x+2)}}$$

$$\parallel$$

$$\frac{x^2 \cdot 0 + x \cdot 1 + 1 \cdot 1}{(x-1)x(x+2)}$$

$$-2C_2 = 1$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$2C_1 + C_2 - C_3 = 1$$

Legger sammen ligningene:

$$c_1 + c_2 + \cancel{c_3}$$

$$+2c_1 + c_2 - \cancel{c_3} = 0 + 1$$

$$\Rightarrow 3c_1 + \underbrace{2c_2}_{=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1} = 1$$

$$3c_1 - 1 = 1$$

$$3c_1 = 2$$

$$\underline{c_1 = \frac{2}{3}}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$\Rightarrow c_3 = \underbrace{-c_1 - c_2}_{-\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = -\frac{4}{6}+\frac{3}{6}} = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{-\frac{1}{6}}$$

$$c_1 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{1}{6}$$

$$\underline{R(x) = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{6}}{x+2}}$$

$$\int \frac{\overbrace{x+1}^{R(x)}}{(x-1)x(x+2)}\,dx$$

$$\overset{?}{=} \int \left( \frac{\frac{2}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{6}}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{6} \ln|x+2| + C}}$$