8 feb 2016

Lineære transformasjoner

(notasjon: element i $x \in U$)

M $m \times n$-matrise

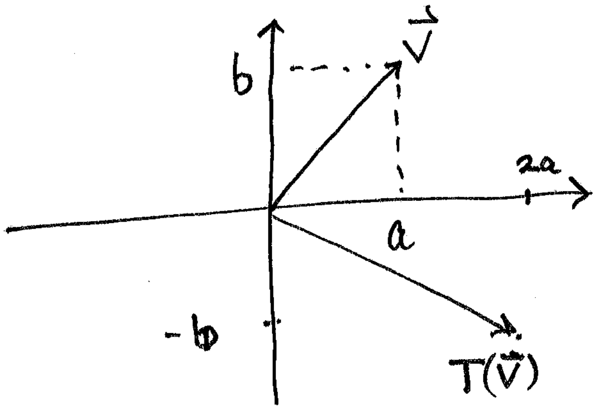
M definerer en transformasjon T

(1) fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ (vektor i $\mathbb{R}^m$)

(vektor i $\mathbb{R}^n$) $\vec{v}$ sendes til $M\vec{v}$ (matrise multiplikasjon)

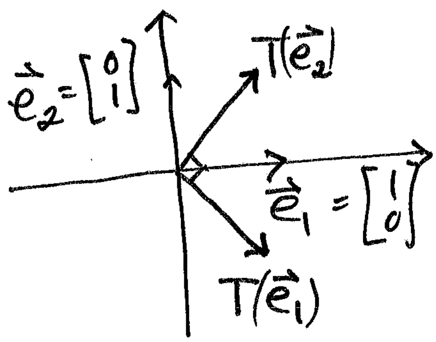
Skrives som $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$M \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ -b \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Roterer med $-45°$ og skalerer med faktoren $\sqrt{2}$.

En funksjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en <u>lineær transformasjon</u> hvis

(2)

$$T(k\vec{v}) = k\,T(\vec{v}) \qquad \text{skalar } k$$

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2).$$

Transformasjoner gitt ved en matrise (matrisemultiplikasjon) er lineære transformasjoner.

$M\vec{x} = \vec{b}$ likningssystem

$m \times n$-matrise

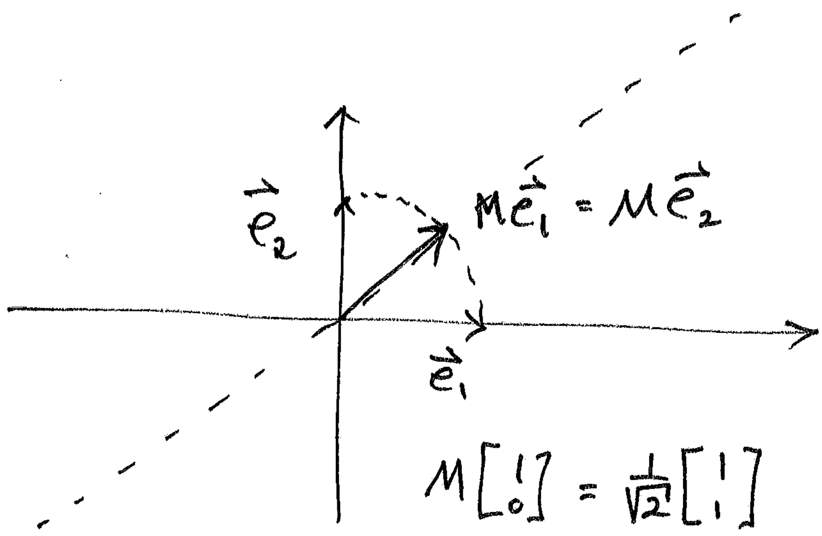
$$M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Likningssystemet kan tolkes som følger: Finn alle vektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ som sendes (via M) til vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Eksempel

Beskriv transformasjonen gitt ved

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$M\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{—''—}$$

M gir projeksjon til linjen $y = x$, samt skalering med $\sqrt{2}$

$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ er projeksjon til linjen } x = y \right)$

③ Lineære transformasjoner

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er på formen

x sendes til kx for en skalar k.

$f(x) = ax + b$ er bare en lineær trans. når $b = 0$

(I kalkulus sier vi gjerne at alle funksjoner på formen $ax + b$ er lineære funksjoner i x.)

Lineære trans. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er på formen

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1 x_1 + \cdots a_n x_n$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{x}$$ for skalarer $a_1, \ldots, a_n$.

Resultat Alle lineære transformasjoner

(4) $$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

er gitt som den lineære transformasjonen tilordnet en $m \times n$-matrise M_T.

Denne matrisen kalles standard matrisen til transformasjonen.

Bevis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ standard basis for $\mathbb{R}^n$.

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + v_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

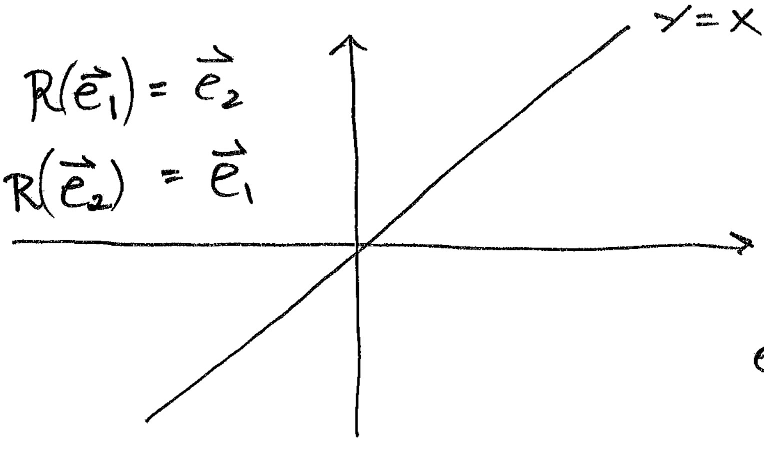
$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

$$T(\vec{v}) = T(v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n) \qquad T \text{ lineær}$$
$$= v_1 \cdot T(\vec{e}_1) + \dots + v_n T(\vec{e}_n)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T(\vec{e}_1), & T(\vec{e}_2), & \dots, & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ standard matrisen.}} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{matrise-multiplikasjon}$$

$R(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$

$R(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$



Refleksjon R om linjen $y=x$ er en lineær trans.

standard matrisen

er $$\begin{bmatrix} R(\vec{e}_1), & R(\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eks. T er en lineær trans fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$

5 slik at $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

Finn standardmatrisen til T.

Den er $M_T = [T(\vec{e}_1),\ T(\vec{e}_2)]$.

Vi uttrykker $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ ved hjelp av

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$.

$$\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1+6\\2+(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{7}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2).$$

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\frac{1}{7}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)\right) = \frac{1}{7}\left(T(\vec{v}_1) + 2T(\vec{v}_2)\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \underline{\frac{1}{7}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{7}(3\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{1}{7}\left(3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right)$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\frac{1}{7}(3\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\right) = \frac{1}{7}\left(3T(\vec{v}_1) - T(v_2)\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\begin{bmatrix}3\\0\\-6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \underline{\frac{1}{7}\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\-7\end{bmatrix}\right)}$$

Standardmatrisen er

$$\underline{\underline{M_T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\\0 & -7\end{bmatrix}}}$$

$\rightarrow$

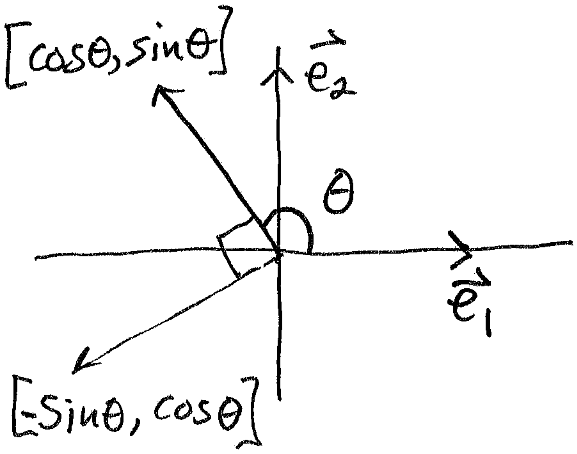
Alternativt:

(6) $M_T \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \ldots$$

Rotasjon (om origo) er en lineær transf.
Standardmatrisen til rotasjon med en vinkel θ er

$$R_\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Rotasjon om vinkel $-\theta$:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}$$

$$R_{-\theta} = (R_\theta)^{-1}.$$

Sjekk

$$R_\theta \cdot R_\varphi = R_{\theta+\varphi}.$$

Resultat

Hvis
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

(7)

er lineære transformasjoner, da er sammensetningen $S \circ T(\vec{v}) = S(T(\vec{v}))$ også en lineær transformasjon.

$$M_{S\circ T} = M_S \cdot M_T \quad \text{standardmatriser}$$

Sammensetning av lineære transformasjoner svarer til matrisemultiplikasjon av standardmatrisene. (motivasjon for definisjonen av matrise mult.)

<u>Bevis</u>
$$T(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} T_{ji}\, \vec{e}_j$$

$$ST(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} T_{ji}\, \underbrace{S(\vec{e}_j)}_{\sum_{l=1}^{k} S_{lj}\, \vec{e}_l} \quad \text{(linearitet til } S\text{)}$$

$$ST(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k} T_{ji}\, S_{lj}\, \vec{e}_l$$

$$(ST)_{li} = \sum_{j=1}^{m} S_{lj}\, T_{ji} \quad \text{element } li$$

i matriseproduktet $M_S \cdot M_T$.

(8) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

standard matrisen til T $\quad M_T$ er kvadratisk

$$|\underline{\det(M_T)}| \cdot \text{volum}(V) = \text{volum}(T(V)).$$

(region V i $\mathbb{R}^n$)

Fortegnet til $\det M_T$ er negativt hvis T reverserer orienteringer.

($n=3$ T bytter fra høyrehandsystem til venstrehandsystem etc)