20 januar 2016

Radoperasjoner & Matriseoperasjoner

$$x - y + z = 0$$
$$x + y - z = 1$$
$$2x + 3y = 2$$

Vi løser likningssystemet

1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad (-1) \quad (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right] \quad \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1/2 \end{array}\right] \cdot 1/3 \quad 2 \quad (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1/6 \\ 0 & 2 & 0 & 1-1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array}\right] \cdot 1/2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 + 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \end{array}\right]$$

Løsningen er $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ og $z = \frac{-1}{6}$.

Ledende elementer i en matrise er de første elementene fra venstre i radene som er ulik 0.

(2)

En matrise er på trappeform hvis

* Alle rader bestående av 0-elementer står nederst
* Alle ledende element er 1
* Ledende elementer forflyttes mot høyre når vi går nedover radene.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er på trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

er ikke på trappeform.

En matrise er på redusert trappeform hvis den er på trappeform og ledende elementer er de eneste elementene ulik 0 i kolonnene de forekommer i.

Resultat: Alle matriser er rad ekvivalente til en matrise på trappeform.

Alle matriser er rad ekvivalente til en entydig matrise på redusert trappeform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ redusert trappeform.

3

Løsningene til et likningssystem med variabler x_1, x_2, x_3 og x_4 og totalmatrise ekvivalent til A. (ovenfor):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_3 &= -2 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$x_1 = 3 - 2x_2$ "x_2 frie variabel"

Løsningene er $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3-2x_2, x_2, -2, 5)$ for $x_2 \in \mathbb{R}$

"en linje av løsninger".

Prosessen med å overføre en matrise til redusert trappeform ved bruk av radoperasjoner kalles Gauss-Jordan-eliminasjon.

Matriseoperasjoner

$m \times n$ matrise
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4

a_{ij} element i posisjon i, j

som er: i-te rad og j-te kolonne.

$m = 1$ $\qquad A = [a_1, \ldots, a_n]$

$1 \times n$-matrise $\qquad$ rad-vektor

$n = 1$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$m \times 1$-matrise

søyle-vektorer.

Matriser skaleres elementvis

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} [3, 2, -1] = [3/2, 1, -1/2].$$

Vi kan legge sammen to matriser med samme dimensjon.

5 $[1, 2] + [-2, 1] = [-1, 3]$.

Matrisene legges sammen elementvis

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [(a_{ij}+b_{ij})]$$

$[1, 2] + [1, 3, -4]$ ikke definert.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 13 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 9 & 17 \end{bmatrix}$$

Transponering bytter rader og søyler

A^T transponerte til A

elementet i posisjon i,j til A^T er elementet i posisjon j,i til A.

Hvis A er $m \times n$-matrise, da er A^T en $n \times m$-matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

3x2 $\qquad$ 2×3

reflekterer om den diagonale linjen.

$$[1, 2, 3]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = [1, 2, 3]$$

$$(A^T)^T = A.$$

6

$$A = [\vec{s}_1 \; \vec{s}_2, \dots \; \vec{s}_n]$$

$\vec{s}_i$ søylevektorer.

$$A^T = \begin{bmatrix} \vec{s}_1^{\,T} \\ \vec{s}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{s}_n^{\,T} \end{bmatrix}$$

$\vec{r}_i$ radvektorer

$$B = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{bmatrix} \qquad B^T = [\vec{r}_1^{\,T}, \dots, \vec{r}_m].$$

Eksamensoppgave desember 2015

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}} + \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{s}_1 & \cdots & \vec{s}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{s}_1 & \cdots & \vec{r}_1 \cdot \vec{s}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{s}_1 & \cdots & \vec{r}_m \cdot \vec{s}_n \end{bmatrix}$$

prikkprodukt

7

$m \times k$ $\quad$ $k \times n$

elementet i posisjon i, j er $\vec{r}_i \cdot \vec{s}_j$.

skalar (prikk) produkt

$[1, 2, 0] \cdot [-1, 1, 3] = 1 \cdot (-1) + 2(+1) + 0 \cdot 3 = 1.$

$[a_1, \ldots a_n] \cdot [b_1, \ldots, b_n] = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$

radvektor

$\vec{r}_q \cdot \vec{s} = [\vec{r} \cdot \vec{s}]$ prikk produkt

søylevektor

$(1 \times k)$ $(k \times 1)$ $\quad$ 1×1 matrise

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ 2×2 matriser

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (ikke kommutativ)

typisk

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ $C \cdot A$ ikke definert

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

gir 3×3 matise

$$3 \times 2 \qquad 2 \times 3$$

8

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

gir 2×2 matise

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7, & 5 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 2^2 + (-1)(-3), & (-2) \cdot 1 + 5(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 35 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x + a_{12} y \\ a_{21} x + a_{22} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$