5. oktober 2016
fausk

Inversmatriser

(1) A $n \times n$ - matrise

* A er inverterbar hvis og bare hvis A på redusert trappeform er lik $\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$.

* Metode for å regne ut A^{-1}:

$$[A \mid \mathbb{1}_n] \underset{\text{rad operasjoner}}{\sim} [\mathbb{1}_n \mid A^{-1}]$$

* A inverterbar $\Leftrightarrow$ n lineært uavhengige søylevektorer $\Leftrightarrow$ n lineært uavhengige radvektorer $\Leftrightarrow$ A overført til redusert trappeform er identitetsmatrise.

* $$A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{x} \end{bmatrix}$$ Fra dette ser vi:

$$(\text{Radoperasjoner på } A) \cdot \vec{x} = (\text{Radop. på } A \cdot \vec{x})$$

$$A\vec{x} = \vec{b} = \mathbb{1}_n \cdot \vec{b}$$

$\wr$ rad op

$$\mathbb{1}_n \vec{x} = B \cdot \vec{b}$$ hvor

$$[A \mid \mathbb{1}_n] \sim [\mathbb{1}_n \mid B]$$

Setter vi $\vec{x} = B\vec{b}$ inn i

(2) $A\vec{x} = \vec{b}$ får vi

$$A(B\vec{b}) = (A \cdot B) \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

La $\vec{b} = \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ldots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Da må $AB = [\vec{e}_1\ \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$

$$= \mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1}\,\mathbb{1}_n$$

$$\mathbb{1}_n \cdot B = A^{-1}$$

$$\underline{B = A^{-1}}$$

Eksempel. Finn inversmatrisen til

3 $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] -2 \quad -4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 3 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & -6 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{5}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right] -2$$

(4)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 1/5 & -6/5 \end{array}\right] \; (-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/5 & -2/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 1/5 & -6/5 \end{array}\right]$$

Så $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

oppgave (til studentene) (eksamen mai 2015)

Inverter $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\ldots \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

5

Minste kvadraters metode

Til orientering.

sjekk geogebra app på hjemmesiden.

Gitt punkt $P_i = (x_i, y_i)$ $\quad i = 1, \dots, n$

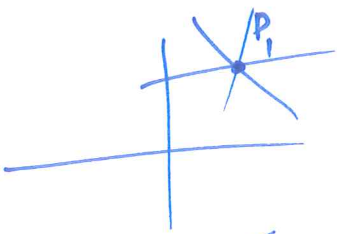
Finn linjen som passer "best" med punktene.

$$y = ax + b \quad \text{(ikke-vertikal)}$$

best: Summen av $\left((ax_i + b) - y_i\right)^2$ for $i = 1, \dots, n$

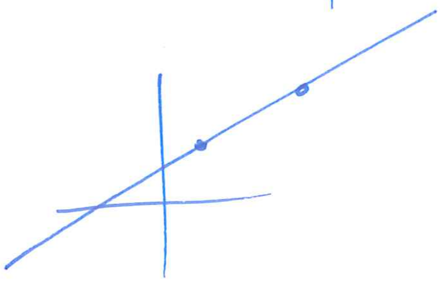
skal være minst mulig.

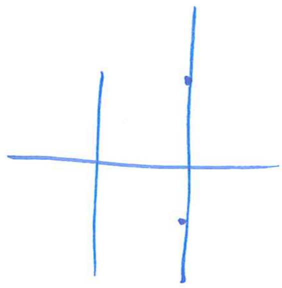
$n = 1$



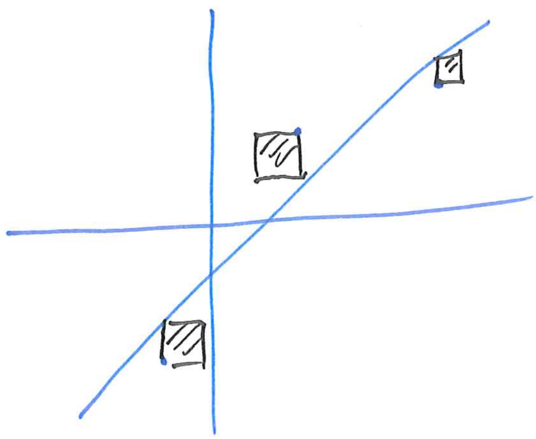
Alle linjer gjennom P er en løsning

$n = 2$





$n > 2$



Summen av arealene til kvadratene skal være minst mulig.

6

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

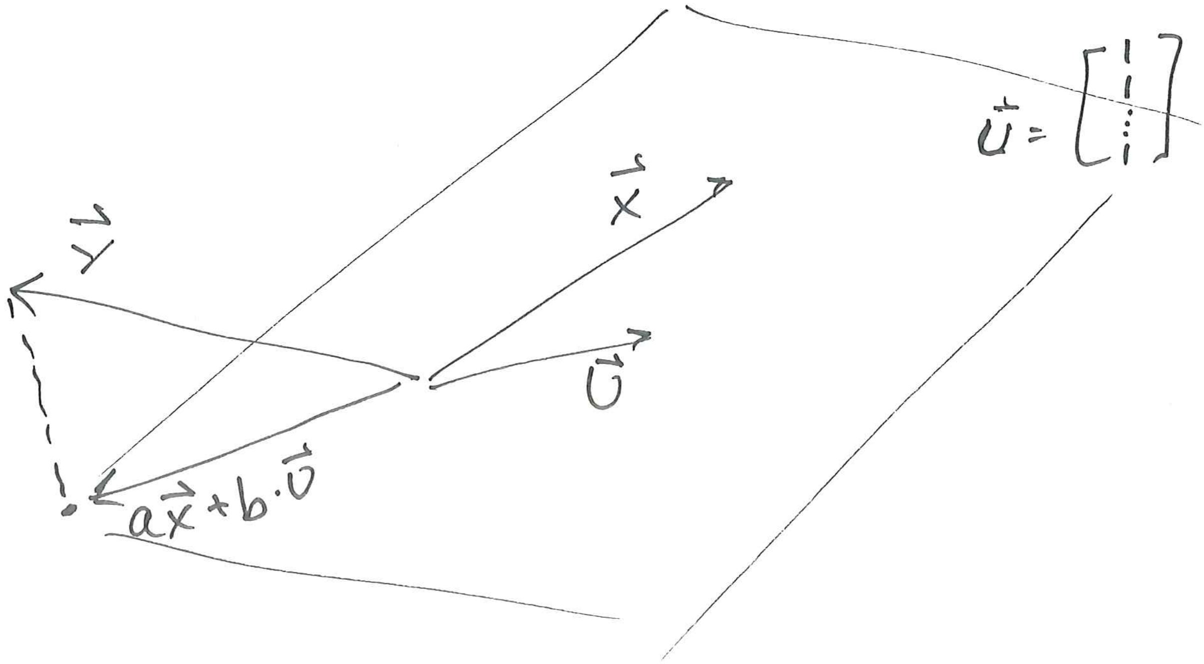
$$y = ax + b$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + b \\ \vdots \\ ax_n + b \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}| = |[v_1, \dots, v_n]| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Summa $v_1^2 + \cdots + v_n^2$ er minst når $|\vec{v}|$ er minst.

Vi ønsker å finne a og b slik at avstanden mellom vektoren $\vec{y}$ og $A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ skal være minst mulig.



7 a og b må være slik at

$\vec{y} - (a\vec{x} + b\cdot\vec{u})$ står vinkelrett på planet.

D.v.s

$$\left(\vec{y} - A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\cdot\vec{x} = 0$$

$$\left(\vec{y} - A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\cdot\vec{u} = 0$$

$$A^T = [\vec{x}, \vec{u}]^T = \begin{bmatrix}\vec{x}^T\\ \vec{u}^T\end{bmatrix}$$

Dette er ekvivalent til

$$A^T\left(\vec{y} - A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right) = \vec{0}$$

Vi ganger ut parentesen

$$A^T\cdot A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = A^T\cdot\vec{y}$$

$$\underbrace{2\times n \quad n\times 2}_{2\times 2} \qquad \underbrace{2\times n \cdot n\times 1}_{2\times 1}$$

Typisk er $A^T\cdot A$ inverterbar og

$$\boxed{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = (A^T\cdot A)^{-1}\cdot A^T\cdot\vec{y}}$$

($n \geq 2$ A^TA inverterbar når ikke alle punktene ligger på en vertikal linje.)