12sep2016

Diff likninger

(1)

$y' = \frac{y}{x}$ 1. orden

$y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0$ lineær homogen

$y' = +\frac{x}{y}$ 1. orden

$y' - x \cdot \frac{1}{y} = 0$ ikkje lineær.

$y'' - y^{(3)} + \sin x \cdot y = \cos x$

lineær inhomogen

3. orden

Hvilke type diff. likninger er dette?

Løsning av lineære 2. ordens diff. likninger med konstante koeffisienter

$y'' + 4y = 0$

Anta $y = e^{rx}$ (generell metode ...)

$y''(x) = r^2 y(x)$

$y'(x) = r\, y(x)$

setter inn $(r^2 + 4)\, y(x) = 0$

$\Leftrightarrow r^2 + 4 = 0$

$r = 2i \qquad r = -2i$

$y_1 = e^{2ix} = \cos(2x) + i \cdot \sin(2x)$

$y_2 = e^{-2ix} = \cos(2x) - i \sin(2x)$

$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos(2x) \qquad \frac{y_1 + y_2}{2i} = \sin(2x)$

Løsningene er

(2) $y = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)$.

(Foretrekker denne presentasjonen når y skal være reell)

Summen av to løsninger til en lineær homogen diff. likning er også en løsning.

$y_1'' + 4y_1 = 0$ $\quad$ $y_2'' + 4y_2 = 0$

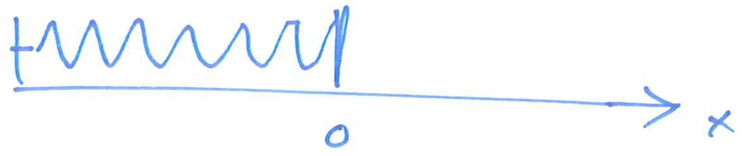
$$(y_1 + y_2)'' + 4(y_1 + y_2)$$
$$= (y_1' + y_2')' + 4(y_1 + y_2)$$
$$= y_1'' + y_2'' + 4(y_1 + y_2)$$
$$= \underbrace{(y_1'' + 4y_1)}_{0} + \underbrace{(y_2'' + 4y_2)}_{0}$$

så $(y_1 + y_2)'' + 4(y_1 + y_2) = 0$.

Det samme gjelder også for en skalar ganget en løsning.

Harmonicske svingninger

③



$$F = -k \cdot x \qquad k \text{ fjærstivhet.}$$

Newtons 2. lov $\qquad F = m \cdot x''$

$$m \cdot x'' = -k \cdot x$$

$$m \cdot x'' + k \cdot x = 0 \qquad m, k > 0$$

$$\left(x'' + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{så} \quad x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \right)$$

Friksjon $\qquad F = -l \cdot x' \qquad l > 0$

$$m \cdot x'' = -l x' - k x$$

$$m x'' + l x' + k x = 0$$

Sjekk gjerne

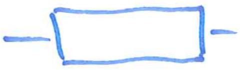
geogebra : harmonisk svingninger

resonanse og demping.

④

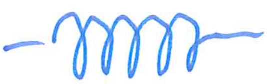
kondensator
kapasistans C

spenning $\frac{q}{C}$



Motstander
Resistanse R

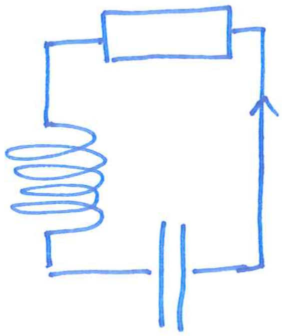
$R \cdot I = R \cdot q'$



spole
Induktans L

$L \cdot I' = L q''$

$$L \cdot q'' + R \cdot q' + \frac{q}{C} = 0$$



Eksempler: (overdempa system)

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$y(0) = -2$
$y'(0) = 0$

$y = e^{rx}$ setter inn: $(r^2 + 3r + 2)\, y = 0$

$\Leftrightarrow \quad r^2 + 3r + 2 = 0$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$r = -2$ og $r = -1$

$y(x) = A e^{-2x} + B e^{-x}$ $\quad (y'(x) = -2A e^{-2x} - B e^{-x})$

$y(0) = A + B = -2$ $\quad y'(0) = -2A - B = 0$

så $B = -2A$, $\quad A + (-2A) = -2$
$\quad -A = -2$ $\quad$ så $A = 2$, $B = -4$

$$\underline{y(x) = 2e^{-2x} - 4e^{-x}}$$

5

$$y'' + py' + qy = 0$$

Generell diskusjon

Setter inn $y = e^{rx}$:

$$r^2 + pr + q = 0$$

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$p^2 > 4q$ <u>overdempet system</u>

r_1, r_2 reelle

$$y(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$$

$p^2 < 4q$ <u>underdempet system</u>

$$y(x) = e^{-px/2}\left(A \sin\left(\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} x\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} x\right)\right)$$

<u>kritisk dempet system</u>

$p^2 = 4q$ $r = \frac{-p}{2}$ dobbel rot

$$y(x) = A e^{rx} + B \cdot \underline{x e^{rx}}$$

(7. sep såg vi på et kritisk dempa system)

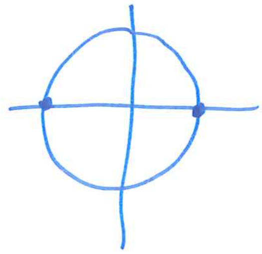
Eksempel Initialverdi problem (underdempa system)

(6)

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0$$
$$y(\pi) = 1$$

Setter inn $y = e^{rx}$

$$(r^2 + 2r + 2)e^{rx} = 0$$
$$(r+1)^2 - 1 + 2 = 0$$
$$(r+1)^2 = -1$$
$$r+1 = \pm i$$
$$r = -1 \pm i$$



$$y(x) = e^{-x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right)$$

$$y(0) = 1 \cdot B = B = 0$$

$$y(\pi) = e^{-\pi}\left(A\sin(\pi) + B\cos(\pi)\right)$$
$$= -e^{-\pi} \cdot B = 1.$$

$0 = 1$ ingen løsning!

Tilfelle 2: $y(0) = y(\pi) = 0$

I begge tilfelle får vi $B = 0$

$y(x) = Ae^{-x}\sin(x)$ A fri!

Uendelig mange løsninger.

Tilfelle 3

La oss kreve

7

$y(0) = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$y(0) = 0$: gir $B = 0$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\pi/2}\left(A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= A e^{-\pi/2}$$

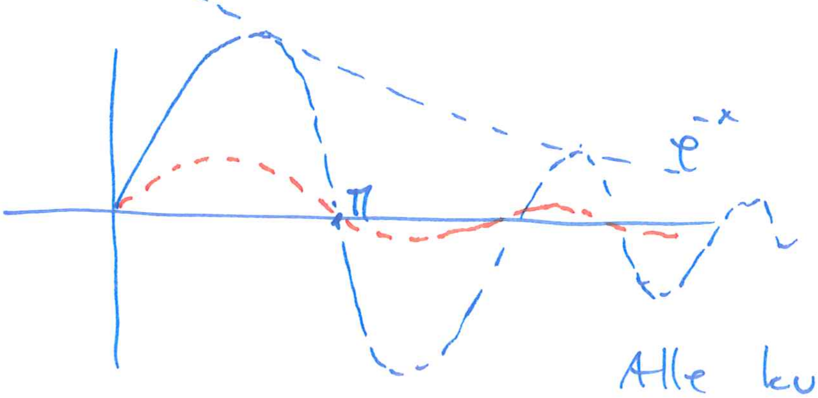
$$= 1$$

Så $\quad A = e^{\pi/2}$

Én løsning $\quad y(x) = \underline{e^{\pi/2} \cdot e^{-x} \sin(x)}$

Forklaring til tilfelle 1 og 2:

$y(0) = 0$ gir at cos-del må være 0



parameter A bestemmer utslagene til $Ae^{-x}\sin x$.

Alle kurvene går gjennom $(\pi, 0)$

Derfor er det uendelig mange løsninger til $y(0) = y(\pi) = 0$

og ingen løsning til $y(0) = 0$ og $y(\pi) = 1$

9

Inhomogene systemer

Eksempel $\qquad y' + 2y = 3$

Fremgangsmåte:

1) Løser den homogene diff likningen

$$y' + 2y$$

I dette tilfellet er dei homogene løsningene $\quad y = Ae^{-2x}$.

2) Finner én partikulær løsning. Det vil si én løsning til den opprinnelige diff. likningen.

I dette tilfellet er funksjonen et polynom, så vi kan forsøke med en løsning som også er et polynom.

Vi ser at $y_p = 3/2$ er en løsning

3) Alle løsninger er på formen

$$y = \underbrace{y_p}_{\text{én partikulær løsning}} + \underbrace{y_h}_{\text{alle homogene løsningene}}$$

I eksempelet er løsningene $\quad \underline{y(x) = \frac{3}{2} + Ae^{-2x}}$