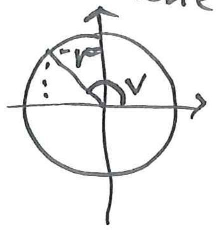
24.08.2016 M1000 fansh

(1) Resultat: Kompleksmultiplikasjon er gitt ved å gange sammen lengdene og legge sammen vinklene



<u>bevis</u>:
$$z = r(\cos v + i \sin v)$$
$$w = s(\cos w + i \sin w)$$

$$z \cdot w = r \cdot s\big(\cos v \cdot \cos w + i^2 \sin v \sin w + i(\cos v \sin w + \sin v \cos w)\big)$$

$$= r \cdot s\Big[\overbrace{\cos v \cos w - \sin v \sin w}^{\cos(v+w)} + i\big(\overbrace{\cos v \sin w + \sin v \cos w}^{\sin(v+w)}\big)\Big]$$

addisjonsformlene for cos & sin

$$= r \cdot s\big(\cos(v+w) + i \sin(v+w)\big) \quad \checkmark$$

<u>Eulers formel</u>: $\quad e^{iv} = \cos v + i \sin v$

<u>De Moivres formel</u>:
$$\cos(nv) + i\sin(nv) = (\cos v + i \sin v)^n$$
$$e^{in \cdot v} = (e^{iv})^n$$

$n=2$ dobling av vinkel formlene for cos og sin:

$$\cos(2v) + i\sin(2v) = (\cos v + i \sin v)^2$$
$$= \cos^2 v - \sin^2 v + i(2 \sin v \cos v)$$

$$\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v$$
$$\sin(2v) = 2 \sin v \cos v$$

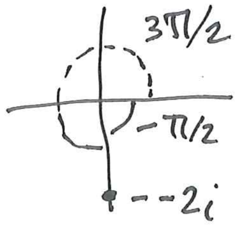
Logaritme $\quad r = e^{\ln r} \quad r > 0$

② $e^0 = 1 \qquad e^{2\pi i} = 1$

$\mathrm{Log}(z)$ er ikkje definert for komplekse tall uten videre. Vi må gjøre valg.

Skal vinkelen være i $\langle -\pi, \pi]$, $[0, 2\pi\rangle$ etc?

La vinkelen være $\langle -\pi, \pi]$. Hva er $\mathrm{Log}(-2i)$?



$$-2i = 2(-i) = 2e^{-\pi/2 \cdot i}$$
$$= e^{\ln 2} e^{-\frac{\pi}{2} i} = e^{\ln 2 - \frac{\pi}{2} i}$$

$$\ln(-2i) = \ln 2 - \frac{\pi}{2} i$$

La vinkelen ligge i intervallet $[0, 2\pi\rangle$

Hva er $\mathrm{Log}(-2i)$?

$$\mathrm{Log}(-2i) = \ln 2 + \frac{3\pi}{2} i.$$

Kvadratrøtter

Kvadratrøttene til w er alle z slik at

$$z^2 = w.$$

Eks Kvadratrøttene til 4 er $-2, 2$

-4 er $-2i, 2i$

$2i$ er $1+i, -(1+i)$.

Hvis w er på polar form re^{iv} så kan vi velge én kvadratrot $\sqrt{r}\, e^{iv/2}$.

Hvis w er på kartesisk form er samlingen av røttene velldefinert, men en utvalgt rot (rotfunksjon) krever at vi velger intervallet vinkelen (til tallet) skal ligge i.

Røttene til $z = re^{iv}$ er

$$\sqrt{r}\, e^{iv/2} \quad \text{og} \quad -\sqrt{r}\, e^{iv/2}$$
$$= \sqrt{r}\, e^{i(v/2+\pi)}$$

Eksempel $w = -2+3i = \sqrt{13}\, e^{i\, 2{,}15879}$

Røttene til w er $\pm \sqrt[4]{13}\, e^{i\, 1.0794}$

$$\left(\sqrt{\sqrt{a}} = (a^{1/2})^{1/2} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a} \right)$$

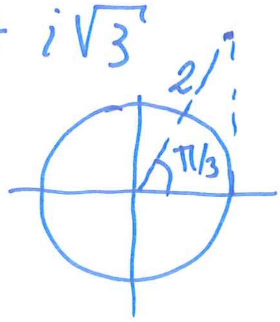
(4)

Matlab def. $\sqrt{z}$ ved å velge

$$z = r\, e^{iv} \qquad -\pi < v \le \pi$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{iv/2}$$

<u>Oppg</u> Finn kvadratrøttene til $z = 1 + i\sqrt{3}$



$$z = 2e^{\pi i/3}$$

Røttene er $\pm\sqrt{2}\,\underbrace{e^{\pi i/6}}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)}$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

spørsmål:

$$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$$

Vi har her benyttet

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{og}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Løs likningen $z^2 - 2iz + 1 = 0$

$a = 1 \quad b = -2i \quad c = 1$

abc-formelen:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2}$$

$$= i \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 2(-1)} = i \pm \sqrt{2}\, i$$

$$z = i(1+\sqrt{2}) \qquad z = i(1-\sqrt{2})$$

Dette gir faktoriseringen

(5) $z^2 - 2iz + 1 = (z - i(1+\sqrt{2}))(z - i(1-\sqrt{2}))$

Fundamentalteoremet i algebra

Alle polynomer $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$
er et produkt av lineære ledd $(az+b)$.
(så polynom av grad n har maksimalt n røtter)

n-te røttene til w er
alle z slik at $z^n = w$

w polar form: $w = re^{iv}$

En n-te rot er $\sqrt[n]{r}\, e^{iv/n}$.

$$\left(\left(\sqrt[n]{r}\, e^{iv/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \left(e^{\frac{iv}{n}}\right)^n = r e^{\frac{iv}{n}\cdot n} = re^{iv} \right)$$

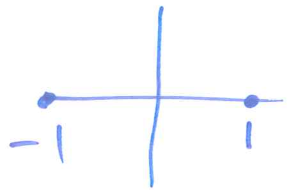
$e^{2\pi i} = 1$ $\quad e^{2\pi i \cdot m} = 1$
m heltall.

Derfor er $e^{2\pi i m/n}$ er en n-te rot til 1.

n forskjellige n-røtter til 1
$e^{2\pi i m/n}$ $\quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$n = 2$

(6)

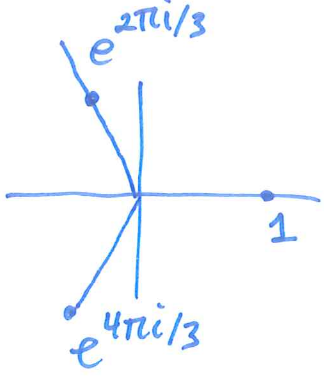


$$(-1)^2 = 1^2 = 1$$

$$z^2 = 1$$

$$z = -1, 1$$

$n = 3$

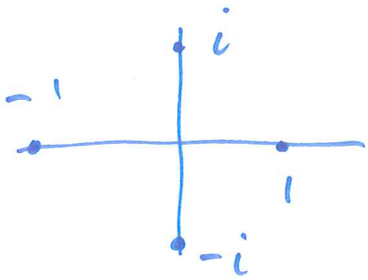


$$z^3 = 1$$

$$z = 1,\ e^{2\pi i/3},\ e^{-2\pi i/3}$$

$$z^3 - 1 = (z-1)(z - e^{2\pi i/3})(z - e^{-2\pi i/3})$$

$n = 4$



$$z^4 = 1$$

$$z = 1, i, -1, -i.$$

$$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

n-te røttene til w

er gitt ved én n-te rot z.

og $z e^{2\pi m i/n}$ $m = 1, \dots, n-1$

(ganger med alle n-te røttene til 1)

$w \neq 0$ har n n-te røtter.

$$w = r e^{iv}$$

n-te røttene til w: $\sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{v}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right)}$

for $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Eksempel

7 Løsningene til $z^4 = -16 = 16e^{\pi i}$

er $\sqrt[4]{16}\, e^{\frac{\pi i + 2\pi m i}{4}}$ $m = 0, 1, 2, 3$

Det er

$$2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\cdot i = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) i^2 = \sqrt{2}(-1-i)$$

$$2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) i^3 = \sqrt{2}(1-i).$$

$-i = e^{3\pi i/2}$

en 3-rot er $e^{\frac{3\pi i}{2\cdot 3}} = e^{\pi i/2} = i.$

Løsningene til $z^3 = -i$ er

i, $ie^{2\pi i/3}$, $ie^{4\pi i/3}$.

Se gjerne notatene for 20. augus 2015 for flere eksempel.

8

Vi benyttet følgende kommandoer i Matlab

abs
angle
real
imag
conj
j
sqrt