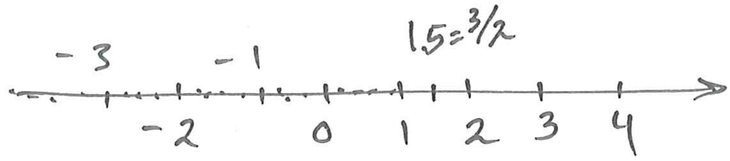
17. aug 2016 — **Komplekse tall** — Fausk

(1)



Naturlige tall	$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \ldots$
Heltall	$\mathbb{Z}$	$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
Rasjonale tall	$\mathbb{Q}$	$\frac{m}{n}$ $n \neq 0$ m, n heltall
Reelle tall	$\mathbb{R}$	tall svarer til punkt på tallinjen.

$\sqrt{2}$ er reelt men ikkje rasjonalt.

Vi utvider $\mathbb{R}$ til dei komplekse tall $\mathbb{C}$

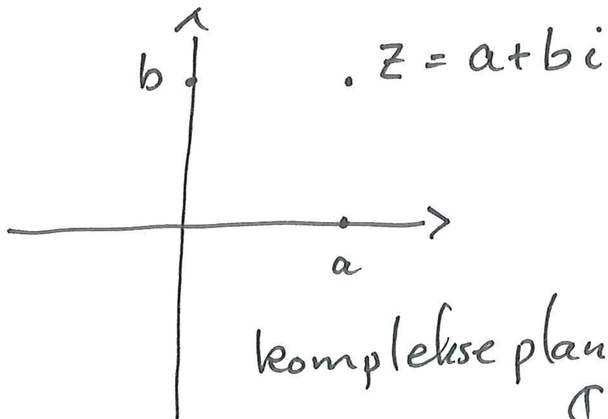
$z = a + bi$ a, b reelle tall

$(= a \cdot 1 + b \cdot i)$ (komplekse tall på kartetisk form)

eks. $z = 2 + 3i$ $x = \frac{3}{2} - \pi i$

$w = 1 - 2i$

$$
\begin{aligned}
z + w &= (2+3i) + (1-2i) \\
&= (2+1) + (3i + (-2i)) \\
&= 3 + (3-2)i \\
&= 3 + 1 \cdot i = 3 + i
\end{aligned}
$$

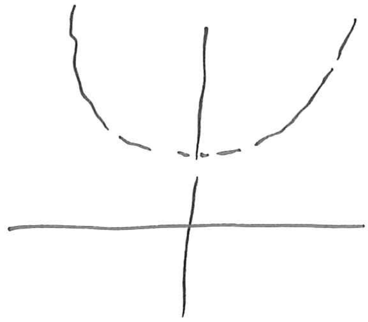


komplekse planet $\mathbb{C}$

Sum av komplekse tall tilsvarer sum av vektorer i planet.

Multiplikasjon

$$\boxed{i^2 = -1}$$



(2) $x^2 + 1 = 0$

ingen reelle løsninger

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$(-i)^2 + 1 = (-1)^2 i^2 + 1 = i^2 + 1 = 0$$

Så i og $-i$ er løsninger (røtter) til likningen $x^2+1=0$.

x^2+1 faktoriseres over $\mathbb{C}$ som

$$\underline{(x+i)(x-i)} = x^2 + \underbrace{x(-i) + i\cdot x}_{0} + i(-i)$$

$$= x^2 - i^2$$

$$= \underline{x^2 + 1}$$

eksempel

$z = 2+3i \qquad w = 1-2i$

$$z \cdot w = (2+3i)(1-2i)$$

$$= 2\cdot 1 + 2(-2i) + 3i(1) + 3i(-2i)$$

$$= 2 - 4i + 3i - 6\underbrace{i^2}_{-1} = 2 + (-4+3)i - 6\cdot(-1)$$

$$= \underline{8 - i}$$

(Cardanos formel for løsningene til en tredjegradslikning var en tidlig bruk av imaginære tall. Se mer om den i matlab kompendiet 7.4 eller wikipedia)

3

$z = a + bi$ a, b reelle tall

$\uparrow$ realdel til z $\uparrow$ imaginærdelen til z

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a+bi) = a$$

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a+bi) = b$$ (ikkje bi)

$b=0$ $a = a + 0\cdot i$ reelt tall

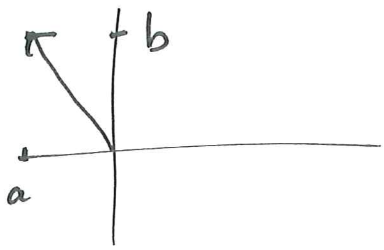
$a=0$ $bi = 0 + bi$ reint imaginære tall.

(eks $i = 1\cdot i = 0 + 1\cdot i$)

Absoluttverdien $|z|$ til $z = a+bi$

er $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

(Pythagoras $|z| = \sqrt{|a|^2+|b|^2}$)



$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + \underbrace{a(-bi)+(bi)a}_{0} - b^2i^2$$

$$= a^2+b^2 = |z|^2$$

Definisjon: Den kompleks konjugerte til $z = a+bi$

er $\bar{z} = a - ib$

(i erstattes av $-i$)

$z\cdot\bar{z} = |z|^2$ $|z| > 0$ når $z \neq 0$

(4) Alle komplekse tall ulik 0 har en invers under multiplikasjon.

eks. Finnes det en w slik at

$$w \cdot (2+3i) = 1 \quad ?$$

$$\frac{(2-3i)}{13} \cdot (2+3i) = \frac{2^2+3^2}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

$w = \frac{2-3i}{13}$ er inverselementet til $2+3i$.

$z \neq 0$

(så $|z| \neq 0$)

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

fordi $\frac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot z = \frac{\bar{z} \cdot z}{|z|^2} = 1$

$$i^{-1} = \frac{-i}{|i|^2} = \underline{-i}$$

Eksempel

$$(-2+i)^{-1} = \frac{-2-i}{\left(\sqrt{(-2)^2+1^2}\right)^2} = \underline{\underline{-\frac{2+i}{5}}}$$

Løs likningen 1) $2+3z = i$.

$3z = -2+i$ (legger til -2 på begge sider av likhetstegnet)

$$z = \frac{-2+i}{3} = \underline{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i}$$

2) $(-2+i)z = 5i$

(ovenfor)

$$z = \frac{1}{-2+i} \cdot 5i = -\frac{2+i}{5} \cdot 5i = -(2+i) \cdot i = \underline{1-2i}$$