Innlevering	DAFE ELFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Onsdag 4. februar 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:	12

LØSNINGSFORSLAG

1

Skriv følgende komplekse tall både på kartesisk form som $a + bi$ og på polar form som $re^{i\theta}$ ($r \geq 0$ og $0 \leq \theta < 2\pi$).

a) $2 + 3i$

b) $4i^2$

c) $e^{1-5\pi i/6}$

d) $e^{\ln(2)+90i}$

e) $e^{e^{\pi i/2}}$

LF:

a) Tallet $2 + 3i$ er allerde på kartesisk form. På polarform er tallet lik re^{it} hvor $r = |2+3i| = \sqrt{13} = 3.60555...$ og siden tallet ligger i første kvadrant er vinkelen i det angitte intervallet lik $t = \arctan(3/2) = 0.9827937$ rad. Tallet er tilnærmet lik $3.60555e^{0.9827937i}$.

b) På Kartesisk form er $4i^2$ lik -4. På polar form er tallet lik $4e^{\pi i}$.

c) På polar form er tallet $e^{1-5\pi i/6} = e \cdot e^{7\pi i/6}$. Vi har lagt til et helt omløp til vinkelen $-5\pi/6$ for å få en vinkel i angitt intervall. På kartesisk form er dette lik

$$e \cdot (\cos(7\pi i/6) + i \sin(7\pi i/6)) = -\sqrt{3}e/2 - e/2i$$

d) På polar form er $e^{\ln(2)+90i} = e^{\ln(2)}e^{90i} = 2 \cdot e^{(90-28\pi)i}$. Her har vi benyttet at $90/(2\pi) = 14.3239...$ for å finne en vinkel mellom 0 og 2π. På kartesisk form er tallet tilnærmet $-0.89614 + 1.78799i$.

e) På polarform er $e^{e^{\pi i/2}}$ lik e^i (både r og θ er lik 1). På kartesisk form er det lik $\cos(1) + i\sin(1)$ som er tilnærmet lik $0.540302 + 0.841470i$.

2

Løs følgende likninger over $\mathbb{C}$ (finn løsninger blant de komplekse tallene). Oppgi svarene eksakt.

a) $(1-i)z+(3-i)=i$

b) $(\sqrt{3}-i)z=i$

c) $z^2+iz=1$

d) $z^2=\sqrt{3}+3i$

e) $z^6-1=0$

LF:

a) Vi finner at

$$z=\frac{i-(3-i)}{1-i}=\frac{(-3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3-i+2i^2}{2}=\frac{-5-i}{2}$$

b) Løsningen er

$$\frac{i}{\sqrt{3}-i}=\frac{i(\sqrt{3}+i)}{3+1}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}$$

c) Likningen er ekvivalent til $z^2+iz-1=0$. Dette er en annengradslinkning og løsningene er

$$\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4(-1)}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}$$

d) Likningen er lik

$$z^2=\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{\pi i/3}.$$

De to løsningene er derfor

$$\pm\sqrt{2}\sqrt[4]{3}e^{\pi i/6}=\pm(\sqrt[4]{3}/\sqrt{2})(\sqrt{3}+i).$$

e) Likningen er ekvivalent til $z^6=1$. Løsningene er de seks forskjellige 6-røttene til 1.

$$1, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, e^{\pi i}=-1, e^{4\pi i/3}, e^{5\pi i/3}$$

3

Faktoriser følgende polynomer som et produkt av lineære polynomer.

a) $z^2 + i$

b) $-z^2 + 2iz - 4$

c) $iz^3 + 2z^2 + 4iz$

d) $3z^2 - e^i$

Løsningsforslag:

a) $z^2 + i = z^2 - (-i) = (z - (-1 + i)/\sqrt{2})(z + (-1 + i)/\sqrt{2})$.

b) $-z^2 + 2iz - 4 = -(z^2 - 2iz + 4) = -((z - i)^2 - (-5)) =$
$-((z - i) - \sqrt{5}i)((z - i) + \sqrt{5}i) = -(z - (1 + \sqrt{5})i)(z - (1 - \sqrt{5})i)$

c) $iz^3 + 2z^2 + 4iz = iz(z^2 - 2iz + 4) = iz(z - (1 + \sqrt{5})i)(z - (1 - \sqrt{5})i)$

d) $3z^2 - e^i = 3(z^2 - (1/3)e^i) = 3(z - (1/\sqrt{3})e^{i/2})(z + (1/\sqrt{3})e^{i/2})$

4

Faktoriser følgende polynomer som et produkt av:
1) irredusible reelle polynomer og
2) lineære komplekse polynomer

a) $z^5 - z^2$

LF:

$$z^2(z^3 - 1) = z^2(z - 1)(z - e^{2\pi i/3})(z - e^{4\pi i/3})$$

Over de reelle tall er faktoriseringen

$$z^2(z - 1)(z^2 + z + 1)$$

b) $2w^2 - 3w + 1$

LF:

$$2(w^2 - (3/2)w + 1/2) = (w - 1)(2w - 1)$$

c) $y^2 - 2y + 4$

LF:

$$(y - 1)^2 - 1 + 4 = (y - 1)^2 + 3 = (y - 1 + \sqrt{3}i)(y - 1 - \sqrt{3}i)$$

Over de reelle tall er polynomet irredusibelt.

d) $x^4 + 1$

LF: Fjerderøttene til -1 er

$$(1+i)/\sqrt{2} \quad (1-i)/\sqrt{2} \quad -(1+i)/\sqrt{2} \quad -(1-i)/\sqrt{2}$$

Faktoriseringen over $\mathbb{C}$ er derfor

$$(z-(1+i)/\sqrt{2})(z-(1-i)/\sqrt{2})(z+(1+i)/\sqrt{2})(z+(1-i)/\sqrt{2})$$

Over de reelle tall er faktoriseringen

$$(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)$$

(Hvis et polynom har reelle koeffisienter så er r en rot hvis og bare hvis den kompleks konjugerte $\overline{r}$ også er en rot. Ganger vi sammen $(z-r)$ og $(z-\overline{r})$ får vi

$$z^2 - 2\mathrm{Re}(r)z + |r|^2.$$

Dette er et polynom over de reelle tall. Dette (sammen med polynomdivisjon) gir at alle polynomer over de relle tall kan faktoriseres som et produkt av lineære eller kvadratiske polynomer over reelle tall.

En annen måte å finne faktoriseringen over de reelle tall er å benytt konjugatsetningen på $z^4+1=(z^2+1)^2-(\sqrt{2}z)^2$.)

5

De hyperbolske funksjonene er definert som følger

$$\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad \text{og} \quad \sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

a) Vis at funksjonene er henholdsvis den jevne og odde delen av e^z. (En funksjon er jevn hvis definisjonsområde er symmetrisk om 0 og $f(-x)=f(x)$. Tilsvarende er en funksjon odde hvis $f(-x)=-f(x)$.)

LF: Vi sjekker at kravene er oppfylt:

$$\cosh(z)+\sinh(x) = \frac{e^z+e^{-z}}{2} + \frac{e^z-e^{-z}}{2} = e^z$$

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z}+e^z}{2} = \cosh(z)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{-z}-e^z}{2} = -\sinh(z)$$

Det står mer om odde og jevne funksjoner i et notat på hjemmesiden til kurset.

b) Vis at for reelle tall x så er

$$\cos(x) = \cosh(ix) \quad \text{og} \quad \sin(x) = -i\sinh(ix).$$

Dette motiverer å la de trigonometriske funksjonene av vilkårlige komplekse tall være gitt ved formlene ovenfor.

LF: For alle reelle tall er

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x}{2} = \cos(x)$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{\cos x + i\sin x - (\cos x - i\sin x)}{2} = i\sin(x)$$

så

$$-i\sinh(ix) = -i^2\sin(x) = \sin(x)$$

c) Vis at

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{og} \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

for alle komplekse tall z. De hyperbolske funksjonene cosh og sinh kalles hyperbolske fordi $(\cosh(t), \sinh(t))$ parametriserer (halvparten av) hyperbelene $x^2 - y^2 = 1$ (for reelle parametre t). De trigonometriske funksjonene cos og sin parametriserer tilsvarende en sirkel.

LF: For alle reelle tall er

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) =$$

$$\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z} - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})\right) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \cosh^2(iz) + (-i\sinh(iz))^2 = \cosh^2(iz) - \sinh^2(iz) = 1$$

d) Vis følgende addisjonsformler (benytt gjerne konjugat og kvadratsetningene etc.)

$$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$

$$\sinh(z + w) = \cosh(z)\sinh(w) + \cosh(w)\sinh(z)$$

Disse addisjonsformlene gir også at addisjonsformelene til cos og sin funksjonene, som vi kjenner dem for reelle tall, faktisk er gyldige for alle komplekse tall.

LF:

$$\cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) =$$

$$\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^w + e^{-w}}{2}\right) + \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^w - e^{-w}}{2}\right)$$

Kryssleddene kanselerer hverandre og vi får

$$\frac{1}{4}\left(2e^{z+w} + 2e^{-z+w}\right) = \cosh(z + w)$$

$$\cosh(z)\sinh(w) + \cosh(w)\sinh(z) =$$

$$\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^w - e^{-w}}{2}\right) + \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^w + e^{-w}}{2}\right)$$

Også her vil kryssleddene kanseleres og vi får

$$\frac{1}{4}\left(2e^{z+w} - 2e^{-z+w}\right) = \sinh(z + w)$$

6

Addisjonsformelen for cos gir at $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Dette er lik $p(\cos(x))$ hvor $p(y) = 2y^2 - 1$ er et polynom av grad 2. Beskriv tilsvarende $\cos(3x)$ og $\cos(4x)$ som et polynom i $\cos(x)$. (Bruk gjerne de Moivres formel.)

LF:

$$\cos(3x) = \mathrm{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^3) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) =$$

$$\cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = \underline{4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$$

$$\cos(4x) = \mathrm{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^4) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) =$$

$$\cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) + (1 - \cos^2(x))^2 = \underline{8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1}$$

7

Skriv funksjonen $f(x) = |x-1| + |x+2|$ med delt forskrift og uten bruk av absoluttegn. (Sjekk gjerne svaret ved å plotte grafen til funksjonen.)

LF:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x \leq -2 \\ 3 & -2 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

8

Bestem parametrene c og d slik at følgende funksjon blir kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} 2dx & x \leq 1 \\ x^2 + c & 1 < x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

LF: Funksjonen er kontinuerlig i $x = 3$ dersom $9 + c = 5$ og den er kontinuerlig i $x = 1$ dersom $2d = 1 + c$. Dette er oppfylt når $c = -4$ og $d = -3/2$.

9

Vis at følgende funksjoner har minst ett nullpunkt i det oppgitte intervallet. Bruk halveringsmetoden til å finne estimater for nullpunktene som du ikke klarer å finne eksakt verdi for. Noen funksjoner vil ha mer enn ett nullpunkt i intervallet sitt. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet. (Halveringsmetoden skal kodes og brukes i denne oppgaven.)

Det ligger en m-fil halvering.m med halveringsmetoden kodet på hjemmesiden til kurset.

a) $2\sin(x) - x \quad [-2, 2]$

LF: Likningen har løsningen $x = 0$. I tillegg er det to løsninger til. Funksjonen er en odde funksjon så nullpunktene er symmetrisk om x-aksen. Funksjonsverdiene i $x = 1$ og $x = 2$ er henholdsvis $2\sin(1) - 1 > 0$ og $2\sin(2) - 2 < 0$. Funksjonen er kontinuerlig, derfor er det et nullpunkt i intervallet $[1, 2]$. Siden funksjonen er en odde funksjon er det også et nullpunkt i intervallet $[-2, 1]]$.

Vi benytter halveringsmetoden hvor vi starter med intervallet $[1, 2]$. Resultatet etter 20 itterasjoner er $x = 1.895$. Røttene med 4 gyldige siffer (vi runder ikke av her men gir de fire første siffrene) er derfor

$$-1.895, \quad 0, \quad 1.895$$

b) $2^x - x^3 \quad x \geq 0$

LF: Funksjonen er kontinuerlig og verdien i $x = 0$ er lik 1, mens verdien i $x = 2$ er lik -4. Fra skjæringssetningen finnes det derfor et nullpunkt i intervallet $[0, 2]$. Videre er funksjonsverdien i $x = 10$ lik $2^{10} - 10^3 = 24$. Det er av samme årsak derfor også et nullpunkt i intervallet $[2, 10]$. Det er ikke flere enn to nullpunkter til funksjonen. (Tegn grafer, analyser monotoniegenskapen etc. for å se dette.) Nullpunktene til 4 gyldige siffer er

$$1.373 \text{ og } 9.939$$

c) $\ln(x) - \dfrac{x}{4} \quad x \geq 0$

LF: Funksjonen er kontinuerlig. Funksjonsverdiene i henholdsvis $x = 1$ $x = e$ og $x = e^2$ er $-1/4 < 0$, $1 - e/4 > 0$ og $2 - e^2/4 < 0$. Det er derfor minst to nullpunkter. Det er ikke flere enn 2 nullpunkter (vi kan se dette fra grafen og ved å analysere funksjonen). Nullpunktet er

$$1.429 \text{ og } 8.613$$

d) $x^5 - 3x - 1 \quad \langle 1, 2\rangle$

LF: Funksjonen er kontinuerlig utvidet til $[1, 2]$. Funksjonsverdien i $x = 1$ er lik -3 og funksjonsverdien i $x = 2$ er lik $32 - 6 - 1 = 25$. Fra skjæringssetningen har funksjonen derfor minst ett nullpunkt. Det viser seg at det er bare ett nullpunkt. Roten er

$$1.388$$

10

Tegn grafen til de følgende funksjonene. Finn alle ekstremalpunktene til hver av funksjonene og angi om de er maksimums- eller minimumspunkt. Bestem eventuelle diskontinuiteter til funksjonene.

a) $f(x) = -2x + 1 \quad \langle -2, 3]$

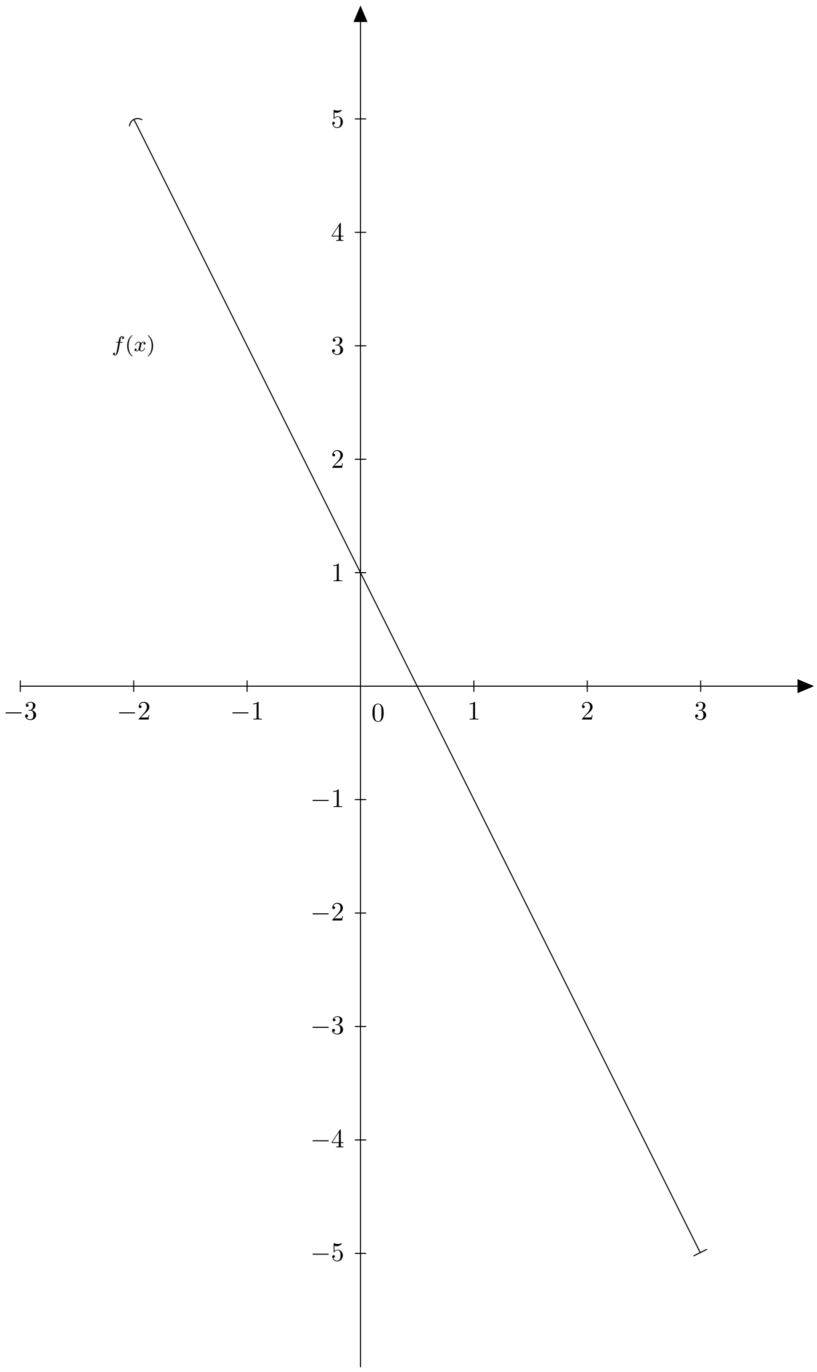
b) $g(x) = -x^2/2 + 2x \quad x \geq 0$

c) $h(x) = \begin{cases} -x-2 & 2 < |x| \leq 4 \\ 2x-1 & -2 \leq x < 2 \end{cases}$

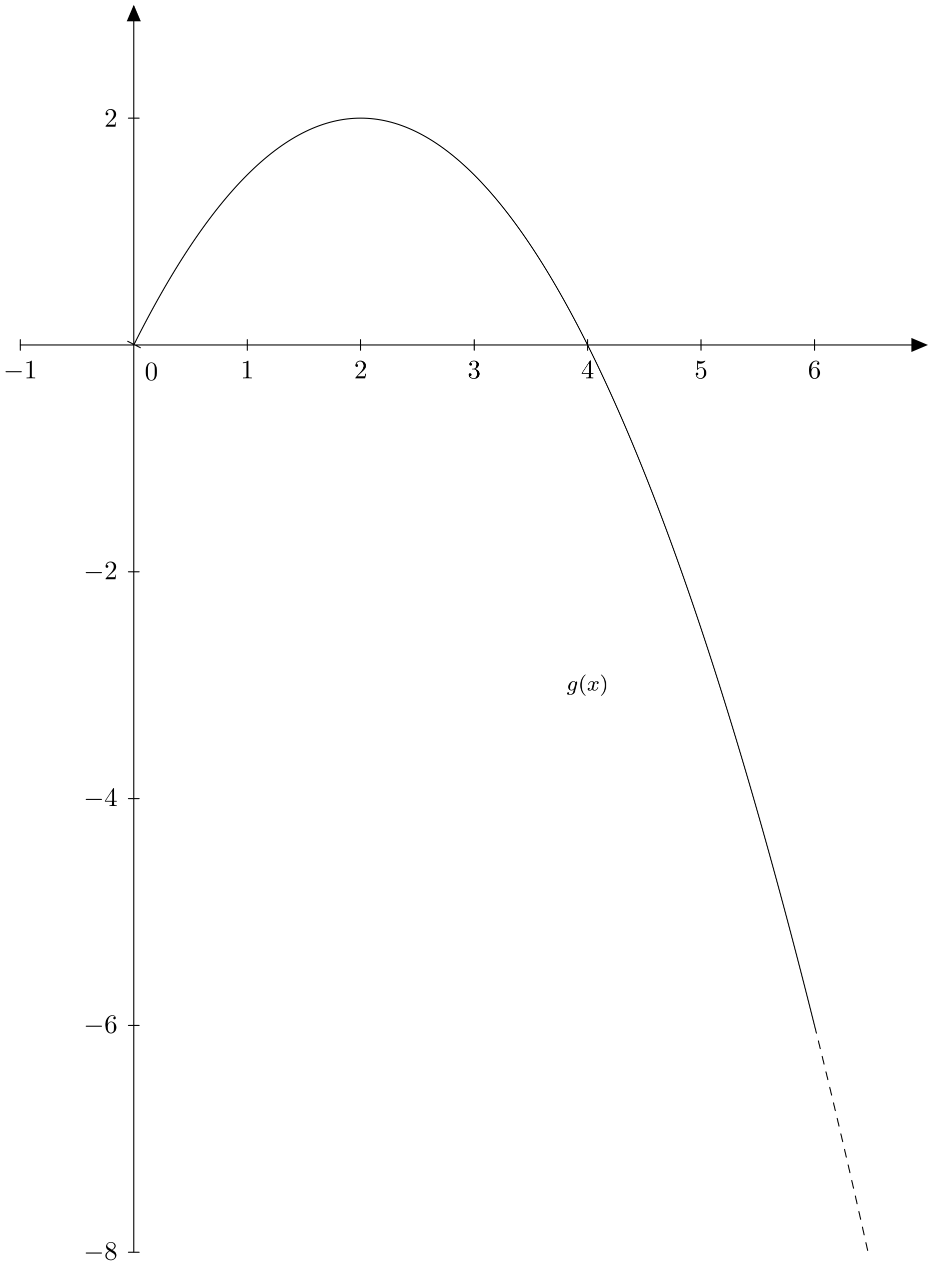
d) $h(x) = \begin{cases} -x-2 & -3 < x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ |x-1| & 0 < x \leq 3 \\ 1/x & x > 3 \end{cases}$

Løsningsforslag

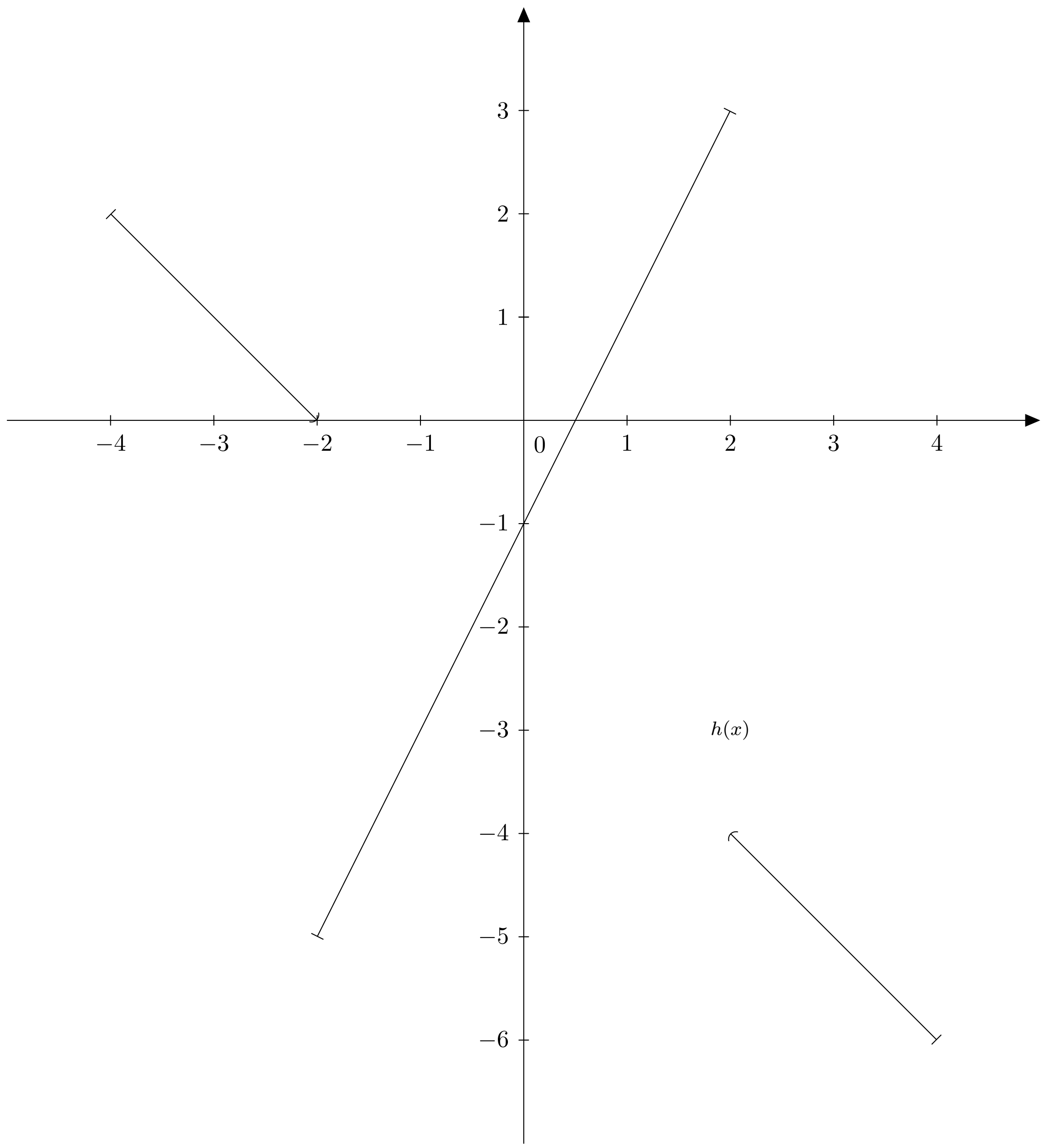
a) Vi ser at $f(x)$ har ingen maksimumspunkt. Derimot har $f(x)$ et minimumspunkt i endepunktet $x = 3$. Mimumsverdien er lik -5.



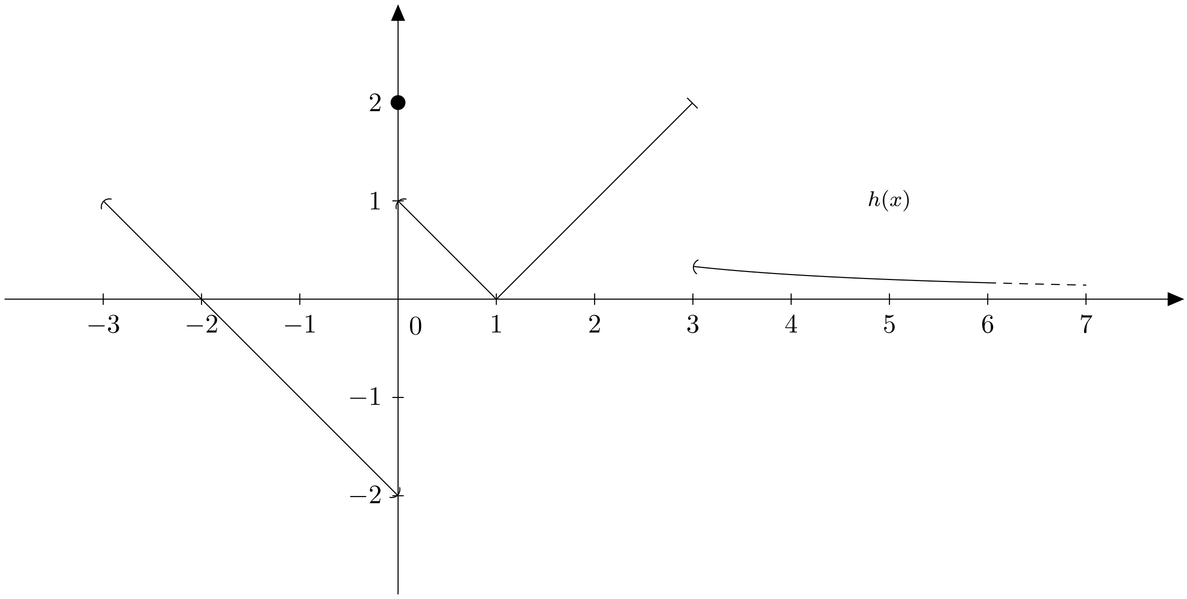
b) Funksjonsuttrykket er lik $-(1/2)((x-2)^2-4)$. Funksjonen har et maksimumspunkt i $x=2$. Maksimumsverdien er lik 2. Funksjonen har ikke noe minimumspunkt.



c) Denne funksjonen er ikke kontinuerlig i alle punkt. Den har hoppdiskontinuiteter for $x = -2$ og for $x = 2$. Funksjonen har maksimumspunkt i $x = 2$. Maksimumsverdien er lik 3. Funksjonen har minimumspunkt i $x = 4$. Minimumsveriden er lik -6.



d) Denne funksjonen er ikke kontinuerlig i alle punkt. Den har hoppdiskontinuiteter for $x = 0$ og for $x = 3$. Funksjonen har maksimumspunkt i $x = 0$ og i $x = 3$. Maksimumsverdien er 2. Funksjonen har ingen minimumspunkter.



11

Finn maksimums- og minumumspunktene til

$$ax^2 + bx + c$$

for alle mulige verdier av parametrene a, b og c.

LF: Hvis $a = 0$ og $b \neq 0$, da er grafen til funksjonen en ikke-horisontal linje. Derfor har funksjonen ingen ekstremalpunkt. Hvis både a og b er lik 0 da er grafen en horisontal linje og alle reelle tall er både maksimums- og minimumspunkter. Maksimumsverdien er lik minimumsverdien og den er lik c.

Anta nå at $a \neq 0$. Vi fullfører kvadratet og får

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + b/ax + c/a) = a\left((x + b/(2a))^2 + c/a - b^2/(4a^2)\right)$$

Hvis $a > 0$ har vi et minimumspunkt i $-b/(2a)$ og hvis $a < 0$ har vi et maksimumspunkt i $-b/(2a)$. I begge tilfellene er ekstremalverdien lik $c - b^2/(4a)$.

12

Løs følgende ulikheter. (Dette er en repetisjonsoppgave. Husk at en ulikhet snur fortegn hvis den ganges med et negativt tall. Det er gjerne enklest å løse ulikhetene ved å flytte alle ledd over til en side slik at ulikhetene blir omformulert til et spørsmål om fortegn. Kontroller gjerne at svarene er rimelige ved å plotte funksjonene involvert i ulikhetene.)

a) $-3x + 5 > 4$

b) $x^2 - 5x \geq 6$

c) $\dfrac{x+2}{x+1} \geq \dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{1}{(x+1)^2} > 1$

a) LF: $x < 1/3$

b) LF: Ulikheten er ekvivalent til $x^2 - 5x - 6 \geq 0$. Vi faktoriserer uttrykket:

$$(x-6)(x+1) \geq 0$$

Løsningene er derfor alle x slik at $x \leq -1$ eller $x \geq 6$.

c) $\dfrac{x+2}{x+1} \geq \dfrac{1}{3}$

LF: Vi samler alle ledd over på venstre side. (Motstå fristelsen til å gange begge sider med $x + 1$, da må vi snu ulikheten når $x < -1$.)

$$\frac{3(x+2) - 1(x+1)}{3(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x+5}{3(x+1)} \geq 0$$

Løsningene er $x \leq -5/2$ og $x > -1$. (Uttrykket er ikke definert i $x = -1$.)

d) $\dfrac{1}{(x+1)^2} > 1$

LF: Løsningsmengden er alle x slik at $|x+1| < 1$ og $x + 1 \neq 0$. Dette er mengden $\langle -2, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle$