Innlevering	DAFE ELFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Onsdag 4. februar 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:	12

1

Skriv følgende komplekse tall både på kartesisk form som $a + bi$ og på polar form som $re^{i\theta}$ ($r \geq 0$ og $0 \leq \theta < 2\pi$).

a) $2 + 3i$

b) $4i^2$

c) $e^{1-5\pi i/6}$

d) $e^{\ln(2)+90i}$

e) $e^{e^{\pi i/2}}$

2

Løs følgende likninger over $\mathbb{C}$ (finn løsninger blant de komplekse tallene). Oppgi svarene eksakt.

a) $(1 - i)z + (3 - i) = i$

b) $(\sqrt{3} - i)z = i$

c) $z^2 + iz = 1$

d) $z^2 = \sqrt{3} + 3i$

e) $z^6 - 1 = 0$

3

Faktoriser følgende polynomer som et produkt av lineære polynomer.

a) $z^2 + i$

b) $-z^2 + 2iz - 4$

c) $iz^3 + 2z^2 + 4iz$

d) $3z^2 - e^i$

4

Faktoriser følgende polynomer som et produkt av:
1) irredusible reelle polynomer og
2) lineære komplekse polynomer

a) $z^5 - z^2$

b) $2w^2 - 3w + 1$

c) $y^2 - 2y + 4$

d) $x^4 + 1$

5

De hyperbolske funksjonene er definert som følger

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{og} \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

a) Vis at funksjonene er henholdsvis den jevne og odde delen av e^z. (En funksjon er jevn hvis definisjonsområde er symmetrisk om 0 og $f(-x) = f(x)$. Tilsvarende er en funksjon odde hvis $f(-x) = -f(x)$.)

b) Vis at for reelle tall x så er

$$\cos(x) = \cosh(ix) \quad \text{og} \quad \sin(x) = -i \sinh(ix).$$

Dette motiverer å la de trigonometriske funksjonene av vilkårlige komplekse tall være gitt ved formlene ovenfor.

c) Vis at

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{og} \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

for alle komplekse tall z. De hyperbolske funksjonene cosh og sinh kalles hyperbolske fordi $(\cosh(t), \sinh(t))$ parametriserer (halvparten av) hyperbelene $x^2 - y^2 = 1$ (for reelle parametre t). De trigonometriske funksjonene cos og sin parametriserer tilsvarende en sirkel.

d) Vis følgende addisjonsformler (benytt gjerne konjugat og kvadratsetningene etc.)

$$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$

$$\sinh(z + w) = \cosh(z)\sinh(w) + \cosh(w)\sinh(z)$$

Disse addisjonsformlene gir også at addisjonsformelene til cos og sin funksjonene, som vi kjenner dem for reelle tall, faktisk er gyldige for alle komplekse tall.

6

Addisjonsformelen for cos gir at $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Dette er lik $p(\cos(x))$ hvor $p(y) = 2y^2 - 1$ er et polynom av grad 2. Beskriv tilsvarende $\cos(3x)$ og $\cos(4x)$ som et polynom i $\cos(x)$. (Bruk gjerne de Moivres formel.)

7

Skriv funksjonen $f(x) = |x-1|+|x+2|$ med delt forskrift og uten bruk av absoluttegn. (Sjekk gjerne svaret ved å plotte grafen til funksjonen.)

8

Bestem parametrene c og d slik at følgende funksjon blir kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} 2dx & x \leq 1 \\ x^2 + c & 1 < x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

9

Vis at følgende funksjoner har minst ett nullpunkt i det oppgitte intervallet. Bruk halveringsmetoden til å finne estimater for nullpunktene som du ikke klarer å finne eksakt verdi for. Noen funksjoner vil ha mer enn ett nullpunkt i intervallet sitt. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet. (Halveringsmetoden skal kodes og brukes i denne oppgaven.)

a) $2\sin(x) - x \quad [-2, 2]$

b) $2^x - x^3 \quad x \geq 0$

c) $\ln(x) - \dfrac{x}{4} \quad x \geq 0$

d) $x^5 - 3x - 1 \quad \langle 1, 2 \rangle$

10

Tegn grafen til de følgende funksjonene. Finn alle ekstremalpunktene til hver av funksjonene og angi om de er maksimums- eller minimumspunkt. Bestem eventuelle diskontinuiteter til funksjonene.

a) $f(x) = -2x + 1 \quad \langle -2, 3]$

b) $g(x) = -x^2/2 + 2x \quad x \geq 0$

c) $h(x) = \begin{cases} -x - 2 & 2 < |x| \leq 4 \\ 2x - 1 & -2 \leq x < 2 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} -x-2 & -3 < x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ |x-1| & 0 < x \leq 3 \\ 1/x & x > 3 \end{cases}$

11

Finn maksimums- og minumumspunktene til

$$ax^2 + bx + c$$

for alle mulige verdier av parametrene a, b og c.

12

Løs følgende ulikheter. (Dette er en repetisjonsoppgave. Husk at en ulikhet snur fortegn hvis den ganges med et negativt tall. Det er gjerne enklest å løse ulikhetene ved å flytte alle ledd over til en side slik at ulikhetene blir omformulert til et spørsmål om fortegn. Kontroller gjerne at svarene er rimelige ved å plotte funksjonene involvert i ulikhetene.)

a) $-3x + 5 > 4$

b) $x^2 - 5x \geq 6$

c) $\dfrac{x+2}{x+1} \geq \dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{1}{(x+1)^2} > 1$