12.4 Lineære diff. likninger med konstante koeff.

20 april 2015

(1) $y' + 2y = 0$

homogen

(separabel diff. likning ...)

Anta at $y = e^{rx}$

$y' = re^{rx} = ry$

$y' + 2y = (r+2)y = 0$

så e^{-2x} er en løsning.

diff. likningen er lin. og homogen

$\Rightarrow$ $\underline{Ae^{-2x}}$ er løsningen for alle A.

$y' + 2y = e^{-3x}$

inhomogen

Vi forsøker med

$y = Ke^{-3x}$

$y' = K(-3)e^{-3x} = -3y$

$(-3+2)\cdot y = e^{-3x}$

$y = K \cdot e^{-3x} = -e^{-3x}$

$\underline{K = -1}$

$y_p = -e^{-3x}$

Løsningene er

$$y = \underbrace{-e^{-3x}}_{\text{partikulær}} + \underbrace{Ae^{-2x}}_{\text{homogene}}$$

Eksponensiell vekst

(Radioaktiv nedbryting)

$(k < 0)$

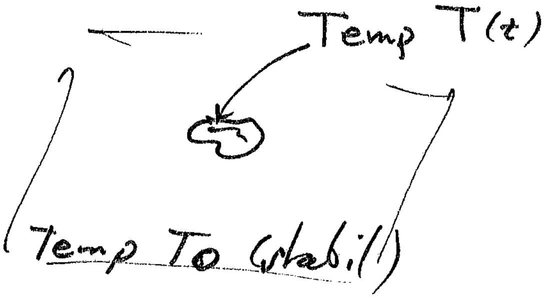
$y' = ky \qquad k > 0$

$y' - ky = 0$

Løsningene: Ae^{kx}.

Newtons avkjølingslov

2



$k > 0$

$$\underline{T'(t) = -k(T - T_0)}$$

$$T' + kT = kT_0$$

En løsning er $T = T_0$ (konstant)

homogene diff. likning

$T' + kT = 0$

$A e^{-kT}$

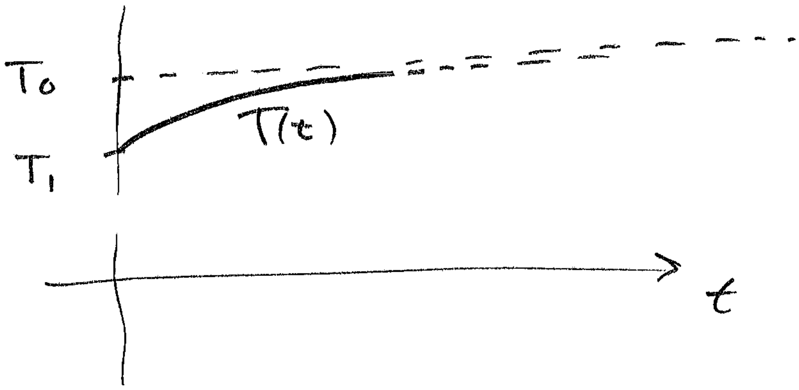
Løsningen er $T(t) = T_0 + A e^{-kt}$.

Initial betingelse $\quad T(0) = T_1$ (start temp.)

$$T(0) = T_0 + A e^0 = T_0 + A = T_1$$

så $A = T_1 - T_0$.

$$\underline{T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-kt}}$$



3a)

$$y'' - 3y = x^2$$

Prøver med $y = Ax^2 + Bx + c$

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

Setter inn: $2A - 3(Ax^2 + Bx + c) = x^2$

$B = 0$ $\quad -3A = 1$ (koeff. til x^2)

$2A - 3 \cdot c = 0$ konst. ledd

$A = \frac{-1}{3}$ $\quad c = \frac{2}{3}A = \frac{-2}{9}$

en løsning er: $y_p = \underline{\underline{\frac{-1}{3}x^2 + \frac{-2}{9}}}$

Eksempler $y'' - 3y = 0$

Forsøker med $y = e^{rx}$

3

$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2 e^{rx}$$

$(r^2 - 3)y = 0$ Løsning $\Leftrightarrow r^2 = 3$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{3}$ og $r = -\sqrt{3}$.

$$y = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}$$

løsningene.

$$y'' - 3y = e^{2x}$$

Forsøker med $y = Ke^{2x}$ $y'' = 2^2 y$

$y'' - 3y = 4y - 3y = y = Ke^{2x} = e^{2x}$, $K = 1$

En løsning er $y_p = e^{2x}$.

Løsningene er $y = \underline{e^{2x} + \underbrace{Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}}_{\text{homogene}}}$

$$y'' - 3y = x + 3$$

Prøver oss frem: $y = Ax + B$, $y' = A$, $y'' = 0$

setter inn: $0 - 3(Ax + B) = x + 3$

$-3Ax - 3B = x + 3$ $B = -1$, $A = -1/3$

$$y = \underbrace{\frac{-x}{3} - 1}_{\text{part. løsning.}} + Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}$$

3b $\quad y'' + ay' + by = 0$ $\quad$ a, b konstanter

y_1 og y_2 er løsninger, da er også $y_1 + y_2$ og $k \cdot y_1$ løsninger:

$$(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2)$$

$$= \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{\substack{0 \\ y_1 \text{ løsning}}} + \underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{\substack{0 \\ y_2 \text{ løsning}}}$$

Så $y_1 + y_2$ er en løsning.

$$(ky_1)'' + a(k \cdot y_1)' + b(k \cdot y_1)$$

$$= k(\underbrace{y_1'' + a \cdot y_1' + by_1}_{\substack{0 \\ y_1 \text{ løsning}}}) = 0$$

Så ky_1 er også en løsning.

$y'' + ay' + by = f(x)$ $\quad$ inhomogen.

Anta y_1 og y_2 er løsninger:

$$(y_1 - y_2)'' + a(y_1 - y_2)' + b(y_1 - y_2)$$

$$= \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{f(x)} - \underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{f(x)} = 0$$

$y_1 - y_2$ er løsning til det homogene problemet.

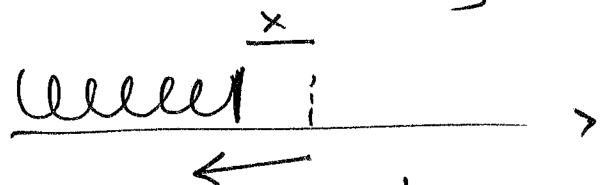
Alle løsninger er på formen $y_p + y_h$

y_p løsn. av den inhomogene likningen

y_h løsninger til homogen

Svingning med demping

(4)



$F = -kx \qquad k > 0$

Newtons lover

$$m x'' = -kx$$

$$m x'' + kx = 0 \qquad \text{deler med } m$$

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right) + B \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right)$$

"Perioden T er tiden det tar å fullføre en hel svingning"

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \underline{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}.$$

Med demping. $\quad F_{demping} = -l x' \qquad l \geq 0$

$$m x'' = -kx - l x'$$

$$x'' + \frac{l}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0$$

lineær 2. ordens homogen diff. likning.

Eksempel

(4a)

$$y'' + 9y = 0$$

setter $y = e^{rt}$.

$$y'' = r^2 e^{rt}$$

setter inn: $(r^2 + 9)y = 0$

Løsningene er $\pm 3i$

e^{3it} og $e^{-3i \cdot t}$ er løsninger.

$\cos(3t) + i\sin(3t)$ $\cos(3t) - i\sin 3t$

$$\cos(3t) = \frac{1}{2}\left(e^{3it} + e^{-3it}\right)$$

$$\sin(3t) = \frac{1}{2i}\left(e^{3it} - e^{-3it}\right)$$

Løsningene til diff. likningen er

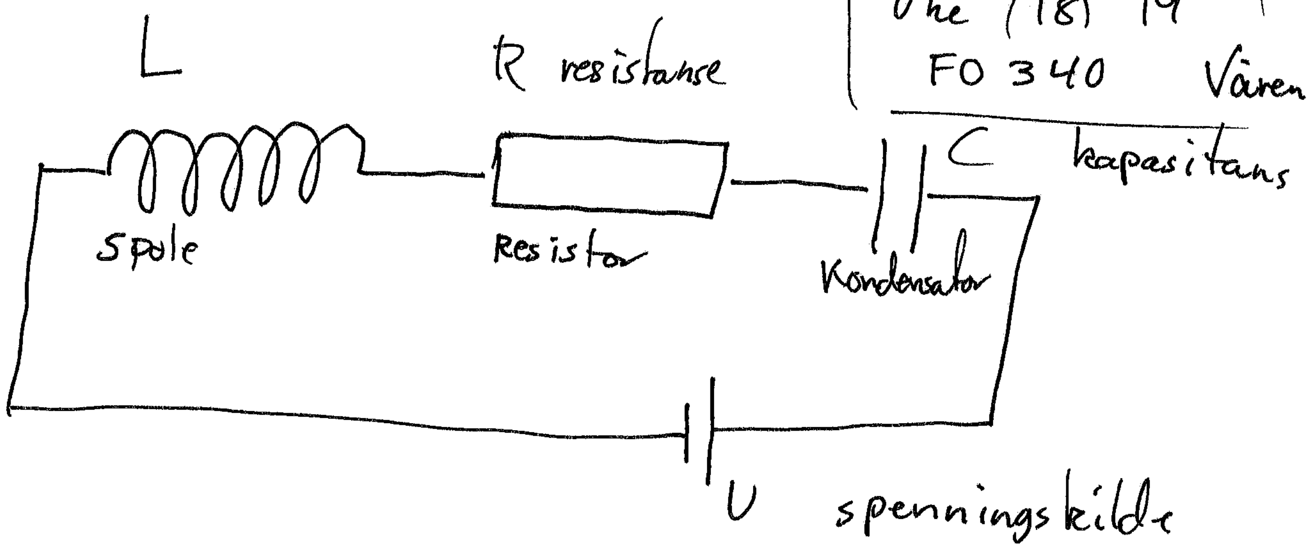
$y(t)$ $\underline{A\cos(3t) + B\sin(3t)}$

(reell funksjon når A og B er reelle tall.)

Sjekk notater
Uke (18) 19 ('Faush')
FO 340 Våren 2009

4b

(selv)induktans



$q(t)$ ladning $\qquad I(t) = q'(t)$ strøm

$$L \cdot q'' + R \cdot q' + \frac{q}{C} = U(t)$$

Dette er helt analogt til systemet med en harmonisk svingning med demping

masse, dempning, fjærstivhet, ytre kraft.

$$m \cdot x'' + l x' + k x = F$$

(5)

$y'' + 10y' + 16y = 0$

Prøver med $y = e^{rx}$.

$y'' = r^2 y \qquad y' = r \cdot y$

$(r^2 + 10r + 16)y = 0$

løsning $\Leftrightarrow$ $r^2 + 10r + 16 = 0$
karakteristisk likning.

$$r = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2} = -5 \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \frac{4}{4} \cdot 16}$$

$$r = -5 \pm \sqrt{25 - 16} = -5 \pm \sqrt{9} = -5 \pm 3.$$

$r = -8$ og $r = -2$

$\underline{y = Ae^{-2x} + Be^{-8x}}$ er løsningene

$y'' + 8y' + 25y = 0$

$y = e^{rx}$

Karakteristisk likning

$r^2 + 8r + 25 = 0$

$$r = \frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 25} = -4 \pm \sqrt{-9}$$

$r_1 = -4 + 3i \qquad r_2 = -4 - 3i.$

$$y = e^{(-4+3i)x} = e^{-4x} \cdot e^{3ix} = e^{-4x}(\cos(3x) + i\sin(3x))$$

$$e^{(-4-3i)x} = e^{-4x} \cdot e^{-3ix} = e^{-4x}(\cos(3x) - i\sin(3x))$$

Løsningene er: $\underline{Ae^{-4x}\cos(3x) + Be^{-4x}\sin(3x)}$

$$y'' + 8y' + 25y = \sin(2x)$$

ser på:

$$y'' + 8y' + 25y = e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

6 Anta Y er en løsning til denne diff. likningen

Da er $\mathrm{Re}(Y)$ løsning til $y'' + 8y' + 25y = \cos(2x)$

og $\mathrm{Im}(Y)$ —— $y'' + 8y' + 25y = \sin 2x$

Forsøker med $Y = Ke^{2ix}$

$$Y' = 2iY \qquad Y'' = (2i)^2 Y = -4Y$$

setter inn: $$(-4 + 8(2i) + 25)\underbrace{Y}_{Ke^{2ix}} = e^{2ix}$$

så $$K = \frac{1}{25-4+16i} = \frac{21-16i}{21^2+16^2} \qquad \left(\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}\right)$$

En løsning til den opprinnelige diff. likningen er

$$\mathrm{Im}\left(K\cdot e^{2ix}\right) = \frac{21-16i}{(21)^2+(16)^2}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)$$

$$\underline{y_p = \frac{1}{21^2+16^2}\left[-16\cos(2x) + 21\sin(2x)\right]}$$

Løsningene er:

$$\frac{1}{21^2+16^2}\left[-16\cos(2x) + 21\sin(2x)\right] + Ae^{-4x}\cos(3x) + Be^{-4x}\sin(3x).$$

$$y'' + 8y' + 25y = \sin(3x)$$ K kompleks konstant

(7) Forsøker med $y = Ke^{i\cdot 3x}$ og likningen $y'' + 8y' + 25y = e^{i3x}$

$$((3i)^2 + 8\cdot 3i + 25)\, ke^{i3x} = e^{i3x}$$

$$(16 + 24i)\, k = 1$$

$$K = \frac{1}{16+24i} = \frac{16+24i}{16^2+24^2}$$

$$y_p = \operatorname{Im}\left| \frac{16-24i}{16^2+24^2} \cdot (\cos 3x + i \sin 3x) \right|$$

$$= \frac{1}{16^2+24^2}\left(16\sin(3x) - 24\cos(3x)\right)$$

Løsningene er på formen:

$$\frac{1}{16^2+24^2}\left(16\sin(3x) - 24\cos(3X)\right) + Ae^{-4x}\cos(3x) + Be^{-4x}\sin(4x)$$

Utslaget er begrenset p.g.a dempinge.

$$y'' + 25y = 0$$

Løsning

$$y = A\cos(5x) + B\sin(5x)$$

Resonanse : $y'' + 25y = \sin(5x)$

Forsøker med $y = Ax\cos(5x)$

$$y' = -5Ax\sin(5x) + A\cos 5x$$

$$y'' = -25y - 2\cdot A\cdot 5\sin(5x).$$

så $-2\cdot 5\cdot A\sin(5x) = \sin(5x)$, $A = \frac{-1}{10}$

$$y = \frac{-x}{10}\cos(5x) + A\cos(5x) + B\sin(5x)$$

(8) $$y'' + 2py' + qy = 0$$

Forsøker med:
$y = e^{rx}$
$y' = r \cdot y$
$y'' = r^2 \cdot y$

Karakteristisk likning

$$r^2 + 2pr + q = 0$$

$$r = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$p^2 - q > 0$ 2 reelle løsning. overdempet

$p^2 - q = 0$ 1 reell løsning. kritisk dempet

$p^2 - q < 0$ 2 komplekse løsninger underdempet

Hvis det bare er én løsning r til den karakteristiske likningen er løsningen

$$(A + Bx)e^{rx}.$$

Visjekker dette:

q er da lik p^2:

$$y'' + 2py' + p^2 y = 0.$$

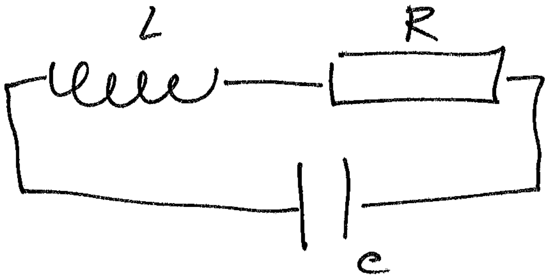
$\underline{r = -p}$

$y = xe^{-px}$ $y' = -p \cdot y + e^{-px}$

$y'' = p^2 y + 2(-p)e^{-px}$ setter vi dette inn

ser vi at $y'' + 2py' + y = 0$.

9 Vi kan nå beskrive løsningene til kretsen



$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

$$q'' + 2\left(\frac{R}{2L}\right)q' + \left(\frac{1}{CL}\right)q = 0$$

overdempet: $R^2 > \frac{4L}{C}$

$$q = A e^{\left(-R/2L + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}/2L\right)t} + B e^{\left(-R/2L - \sqrt{R^2 - 4L/C}/2L\right)t}.$$

Kritisk dempet: $q = (A + B\cdot t)\, e^{-(R/2L)t}$

$R^2 = 4L/C$

Underdempet: $q = A e^{-(R/2L)t} \cos\left(\sqrt{4L/C - R^2} \cdot t\right) + B e^{-(R/2L)t} \sin\left(\sqrt{4L/C - R^2} \cdot t\right)$

$R^2 < 4L/C$

I hvert tilfelle er strømfunksjonen $I(t) = q'(t)$ på samme generelle form som $q(t)$.