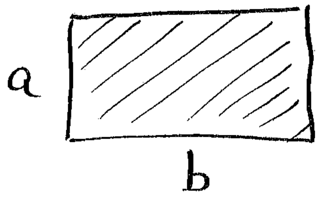
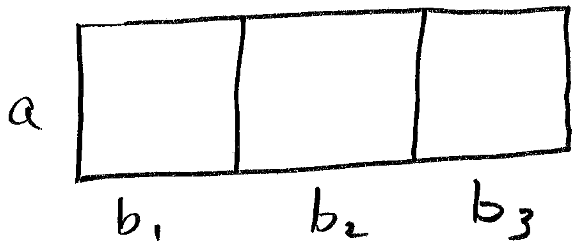
23.03.2015

Areal



$A = a \cdot b$

(1)

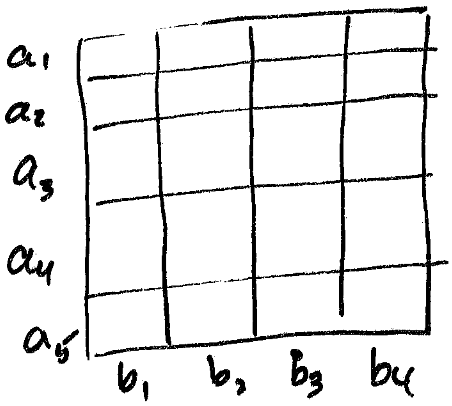


Areal: "stort" rektangel

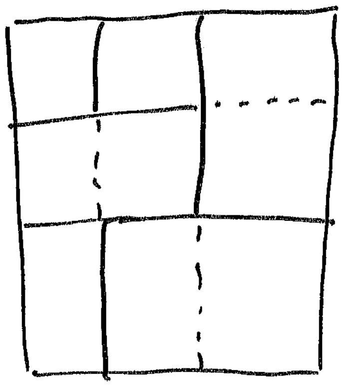
$a(b_1 + b_2 + b_3)$

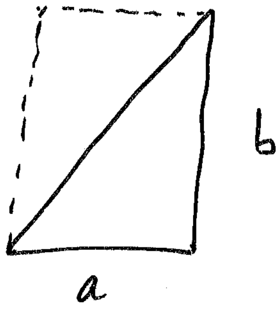
$= a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + a \cdot b_3$

= summen av arealet til de tre "små" rektangler

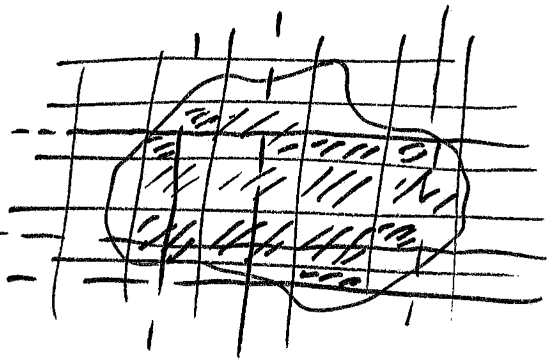


summen av arealet til de "små" rektanglene $a_i \cdot b_j$ er lik arealet til det store rektangelet $(a_1 + \cdots + a_5)(b_1 + \cdots + b_4)$.





areal $\frac{a \cdot b}{2}$



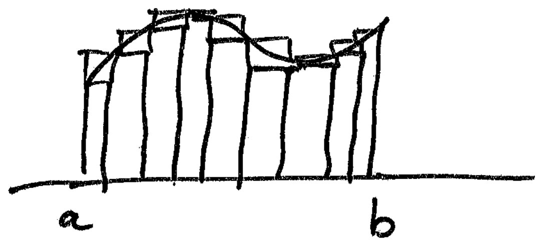
<u>nedre</u> estimat for arealet: sum av areal til rektangler inneholdt i område

øvre ~~sum~~ estimat for arealet: sum av areal til rektangler som dekker område.

Et delområde av $\mathbb{R}^2$ har et areal hvis grensen av øvre og nedre estimat (for arealet) eksisterer og er lik hverandre under forfining av rutenettet.

(2)

Arealet er grensen.

Areal av: 

Riemann integral

$f(x)$ definert på $[a, b]$

partisjon av $[a, b]$ (oppdeling av intervallet)

$$a = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n = b$$

intervall nr i: $[u_{i-1}, u_i]$

bredden på det er $\Delta x_i = u_i - u_{i-1}$.

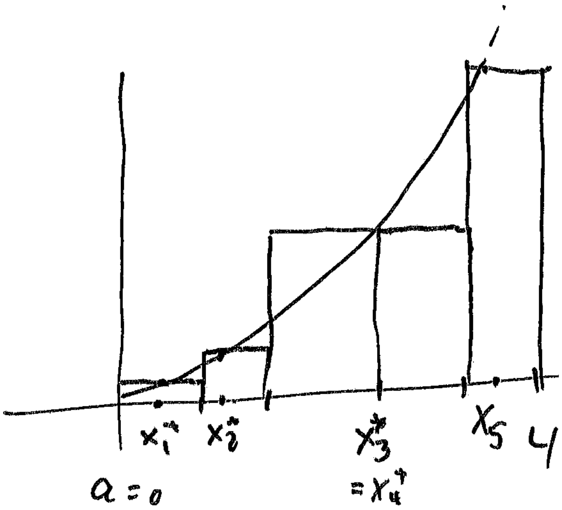
Seleksjon (for en gitt partisjon) består av et valg av punkt i hver delintervall

$x_i^* \in [u_{i-1}, u_i]$ $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

En Riemann sum (for en gitt partisjon og seleksjon)

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots f(x_n^*)\Delta x_n.$$

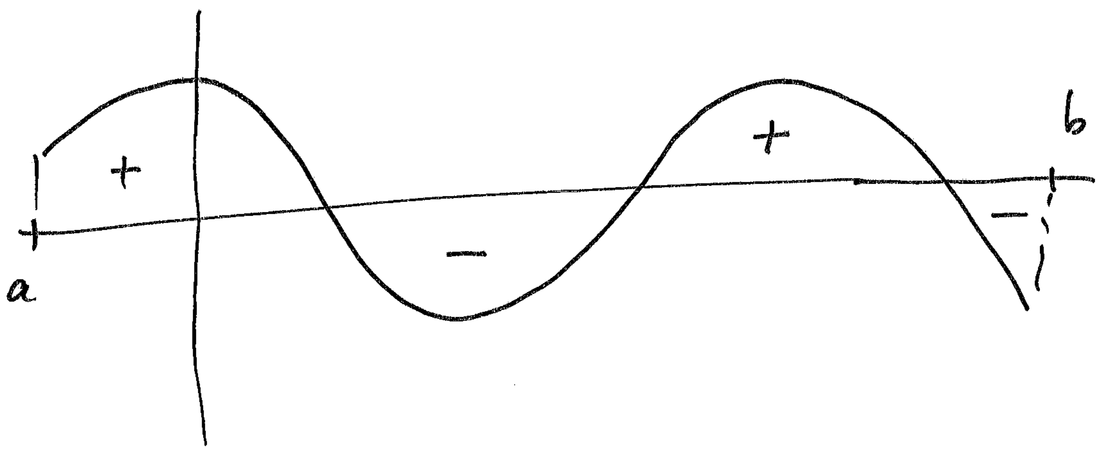
3



Hvis $\lim_{P,S} \left(\sum_i f(x_i) \Delta x_i \right)$ eksisterer sier vi at $f(x)$ er <u>integrerbar på</u> $[a,b]$. Grensen kalles det <u>bestemte integralet</u> til $f(x)$ på $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

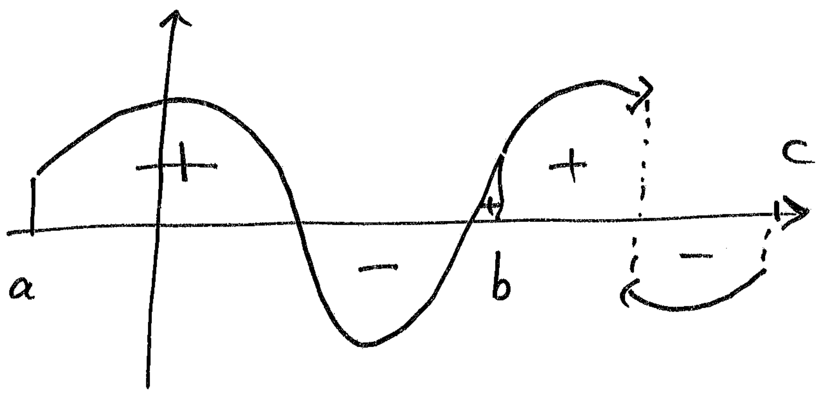
Det bestemte integralet er areal med fortegn mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen fra a til b.



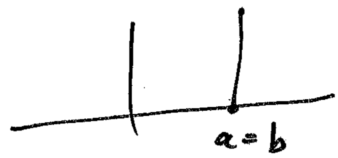
Egenskaper

$a < b < c$ Anta at $f(x)$ er integrerbar på $[a, b]$ og $[b, c]$, da $f(x)$ integrerbar på $[a, c]$ og

(4) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



Hvis $b < a$, da $$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_2^{-3} x^2\,dx = -\int_{-3}^{2} x^2\,dx$$

Riemann integral er lineære:

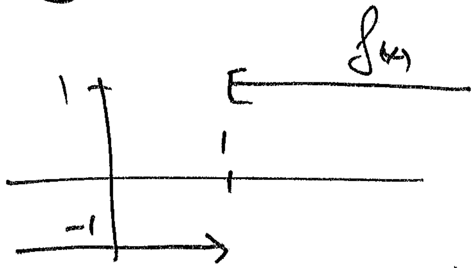
$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Lineær transformasjon : funksjonsrom $\longrightarrow \mathbb{R}$)

Resultat: Alle kont. funksjoner på $[a, b]$ er Riemann integrerbare.

Funksjonen (hopp diskontinuitet)



har ingen antiderivert, men $\int_a^b f(x)\,dx$ eksistere for alle a og b.

[Mange funksjoner $f(x)$ som ikke har noen antiderivert er Riemann integrerbare.]

Ofte så velges partisjonene slik at alle delintervaller er like brede.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + \Delta x \cdot i$$

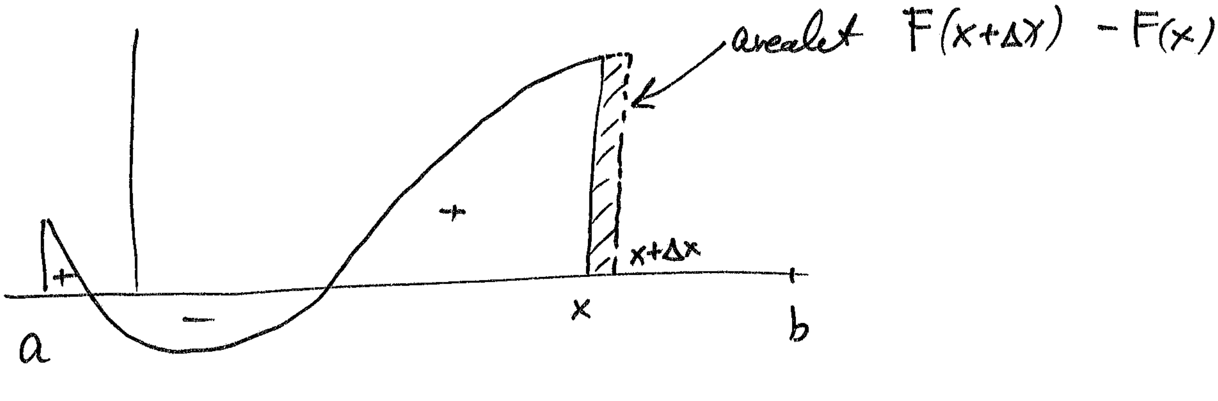
5

Fundamentalteoremet

Anta $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$.

Det bestemte integralet $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en funksjon av x, $x \in [a,b]$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$



$$\min_{x \le t \le x+\Delta x} f(t) \le \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le \max_{x \le t \le x+\Delta x} f(t)$$

I grensen $\Delta x \to 0$:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

6

siden $f(x)$ er kontinuerlig.

$$\int f(x)\, dx = \int_a^x f(x)\, dx + c$$

Anta nå at $F(x)$ er en vilkårlig antiderivert til $f(x)$. Da er $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$

setter $x = a$ og bestemmer c :

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + c, \qquad c = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

setter $x = b$:

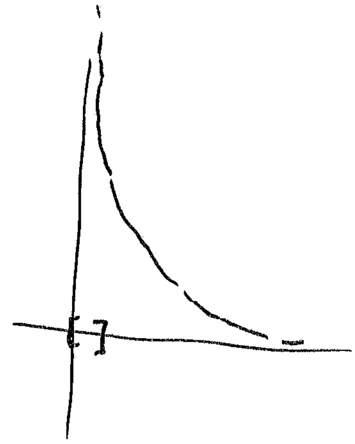
$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

hvor $F(x)$ er en antiderivert for $f(x)$.

$$\int_{-2}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 9 + \frac{8}{3} = \underline{11 + \frac{2}{3}}$$

Ekstra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

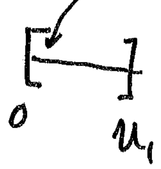


Eksempel

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Riemann integralet finnes ikke!

$u_1^3 = x_1^*$



$$\frac{1}{\sqrt{u_1^3}} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{u_1}}$$

blir vilkårlig stor når $u_1 \to \infty$

$u_1 < 1$

Hadde vi derimot bare sett på begrense funksjoner ($f(x) \geq 0$) og definert

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^N(x)\,dx$$

Hvor

$$f^N(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq N \\ N & f(x) > N \end{cases}$$

så hadde $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ eksistert og vært lik $\underline{2}$.

Se forkursnotater 4.4. vår 2013

Sjekk gjerne ut: uppersum & lowersum i geogebra.