26.02.2015

sjekker definisjonen av determinanter for 2×2 matrise.

(1×1 matrise er en skalar k, det(k) = k.)

(1)
$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \underbrace{\det\begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{bmatrix}}_{d} + b(-1)\underbrace{\det\begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{bmatrix}}_{c}$$

$$= \underline{ad - bc}$$

Eks. på determinanter av 3×3 matriser:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 2(-3)\cdot 5 = \underline{-30}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 2\left(3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2\cdot 1 - 3\cdot 4 \quad - 6(1\cdot 1 - 1\cdot 2) = 2 - 12 + 6 = \underline{\underline{-4}}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 9 & 18 & 27 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2[1,2,4] \\ 9[1,2,3] \\ 5[0 \quad 1 \quad 0] \end{bmatrix} = 2\cdot 5\cdot 9 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2

$$= 90\left(1\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) = -90\,(1\cdot 3 - 1\cdot 4)$$

$$= \underline{\underline{90}}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3[1,1,3] \\ 2[1,1,3] \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{bmatrix} = 2\cdot 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

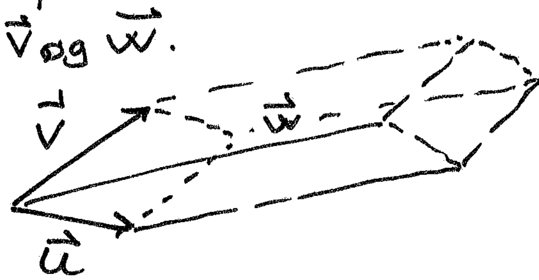
matrisen er uendret om vi bytter de to like radene.

siden determinanten endrer fortegn ved bytte av to rader er determinanten til alle $n\times n$-matriser med to like rader (eller kolonner) lik 0.

Geometrisk fortolkning av 3×3 determinanter

$$\left|\det\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}\right| = \text{volumet til } \underline{\text{parallellepipedet}}$$

utspent av $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.



Fortegnet til $\det\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$ er positivt

$\iff$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er et <u>høyrehåndsystem</u>.

Er vektoren $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$ parallell til

(3) planet utspent av $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

$\Leftrightarrow \det(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}) = 0$

Vi sjekker om dette er tilfelle :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 4(-1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4 + 10) \quad - 4(-8 - (-15)) + 2(4 - (-3))$$

$$= 14 \quad - 28 \quad + 14 = \underline{0}$$

Så $\vec{w}$ er parallell til planet.

$(\vec{w} = \vec{v} - 2\vec{u})$

Til orientering $\quad (-1)^n = \underbrace{(-1)\cdots(-1)}_{n}$ $\quad$ n nat. tall.

$$= \begin{cases} +1 & n \text{ jevn} \\ -1 & n \text{ odde} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Radoperasjoner og determinanter.

4) Gange en rad med $c\ (\neq 0)$ svarer til gange determinanten med c.

Legge til (en skalert) rad til en annen rad endrer ikke determinanten

$$\det\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v}+3\vec{u} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} u \\ 3u \\ \vec{w} \end{bmatrix}}_{3\det\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u} \\ \vec{w} \end{bmatrix}}$$

to like rader så lik 0.

Bytte av to rader svarer til skifte av fortegn på determinanten.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

øvre triangulær matrise ($a_{ij}=0 \quad i>j$)

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

Determinanten til en triangulær matrise er lik produktet av diagonalelementene.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -3 \end{array}$$

det. skifter fortegn!

det. er vendra.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5

$$\det A = (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 7 = \underline{7}$$

A kvadratisk matrise ($n \times n$ matrise)

A har en inversmatrise $A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$$\left(A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det(A)}.$$

En annen måte å finne inversmatrisen til A:

$$[A \mid 1_n] \underset{\substack{\text{anta} \\ \det A \neq 0}}{\overset{\text{Radoperasjoner}}{\sim}} [1_n \mid A^{-1}].$$

($n \times 2n$ matrise)

Forklaring $\rightarrow$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1}A\vec{x} = 1_n\vec{x} = \underline{\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}}$$

6

$$A\vec{x} = 1_n\cdot\vec{b}$$

$\vdots$ radoperasjoner

$$\vec{x} = 1_n\vec{x} = R\cdot\vec{b}$$

R resultatet av $[A|1_n] \sim [1_n|R]$.

$$A\vec{x} = AR\vec{b} = \vec{b}$$

Dette er sant for alle $\vec{b}$

så $AR = 1_n$.

Derfor må R være lik A^{-1}.

Eksempel $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\det A = 7 \neq 0).$

La oss finne A^{-1}.

(7)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \quad -3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \frac{1}{7} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 13/7 & 4/7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 13/7 & 4/7 & -1 \\ -2/7 & 1/7 & 0 \end{bmatrix}$$