5.02.2015 Se gjerne på forkursnotater Vår 2013.

5.8 (Lokale) ekstremalpunkt / verdier

Kritiske punkt

optimaliseringsproblem.

5.6 Implisitt derivasjon, Kobla hastigheter

5.10 Middelverdisetningen

5.8 Monotoniegenskaper

5.9 Omvende funksjoner

ln Loga $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx} \arccos(x)$$

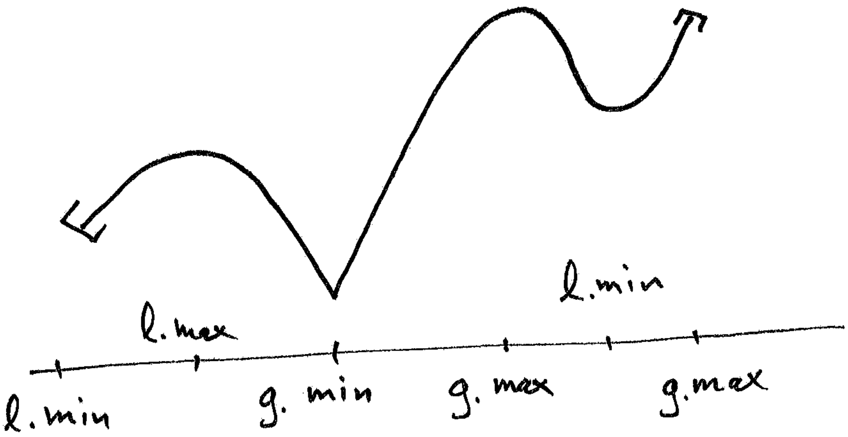
$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

a er et maksimumspunkt for f hvis $f(x) \leq f(a)$ (maksimumsverdien), x i D_f

— lokalt ———— $f(x) \leq f(a)$ for x tilstrekkelig nær a.

Tilsvarende (lokale) minimumspunkt.

Fellesbetegnelse (lokale) ekstremalpunkt/verdier.



Det er maksimalt én global maks/min verdi, men denne kan oppnås i flere maks/min punkt.

Anta a er et indre punkt i D_f (ikke endepunkt)

Hvis f er deriverbar i a og a er et lokalt maks eller min punkt, da må $f'(a) = 0$.

(ide: $f'(a) > 0$ $f'(a) < 0$ ikke mulig å vare ekstremalpunkt hvis $f'(a) \neq 0$)

Kritiske punkt: Punkt a slik at

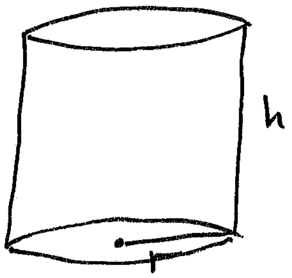
1) a er endepunkt i D_f
2) f ikke deriverbar i a
3) $f'(a) = 0$

Alle ekstremalpunkt er kritiske punkter.

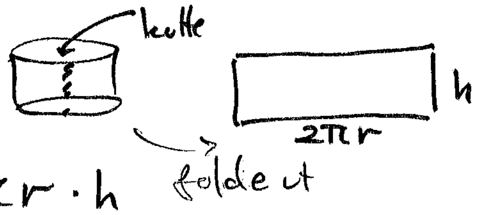
Så det er tilstrekkelig å undersøke kritiske punkter for å finne lokale ekstremalpunkter.

Optimaliseringsproblem

Eksempel



Hvilke forhold mellom høyde h og radius r gir minst overflate for et gitt volum?



$$V = \pi r^2 \cdot h \quad (\text{fast})$$

Overflate areal: sylinderdel: $2\pi r \cdot h$

topp/bunn plate: πr^2

$$O = 2\pi r \cdot h + \pi r^2 \cdot b$$

$b=1$: åpen boks

$b=2$ lukka boks.

$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ Så

$$O(r) = 2\pi \cdot r \left(\frac{V}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 \cdot b$$

$$= \frac{2V}{r} + \pi r^2 \cdot b$$

Kritiske punkt: $\frac{d}{dr} O(r) = 0$

$$2V(-1 \cdot r^{-2}) + \pi \cdot b(2r) = 0$$

$$\frac{2V}{r^2} = 2\pi b \cdot r$$

$$\frac{V}{r^3} = \pi \cdot b$$

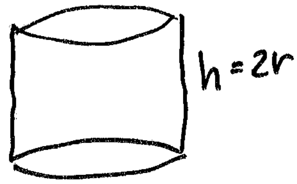
(Dette må være et min. punkt $O(r) \to \infty$ både når $r \to 0$ og $r \to \infty$)

Setter inn for $V = \pi r^2 h$

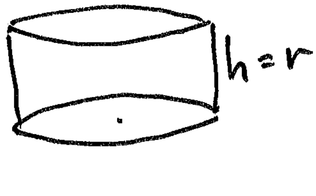
$$\frac{\pi r^2 \cdot h}{r^3} = \pi \cdot b$$

Så $$\underline{\underline{\frac{h}{r} = b}}$$

Lukka boks ($b=2$)



Åpen boks



Implisitt derivasjon (sjekk: geogebra)

$$x^2 - y^3 + ay^2 = 0$$

a parameter

Beskriv $\frac{dy}{dx}$ (stigningstallet til tangenten)

Deriverer hele uttrykket:

(lokalt: $y = y(x)$)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - y^3 + ay^2\right) = \frac{d}{dx}0 = 0$$

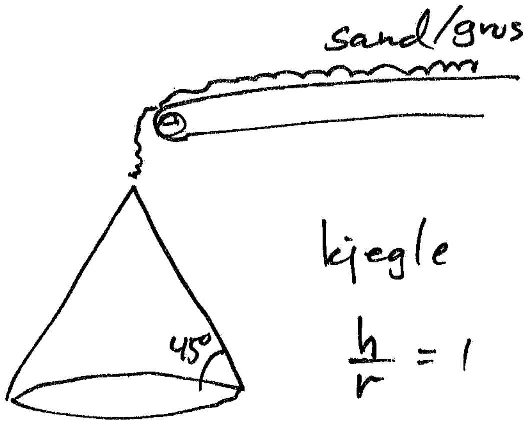
$$2x - \frac{dy^3}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + a\frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 3y^2\frac{dy}{dx} + 2ay\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + \frac{dy}{dx}\left(-3y^2 + 2ay\right) = 0$$

så $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(-3y^2 + 2ay)}$$ (når nevner $\neq 0$)

Kobla hastigheter



Tilføres $1 m^3/s$

$$\frac{dV}{dt} = 1 m^3/s$$

kjegle

$$\frac{h}{r} = 1$$

Hva er endringsraten til høyden (uttrykt ved h)?

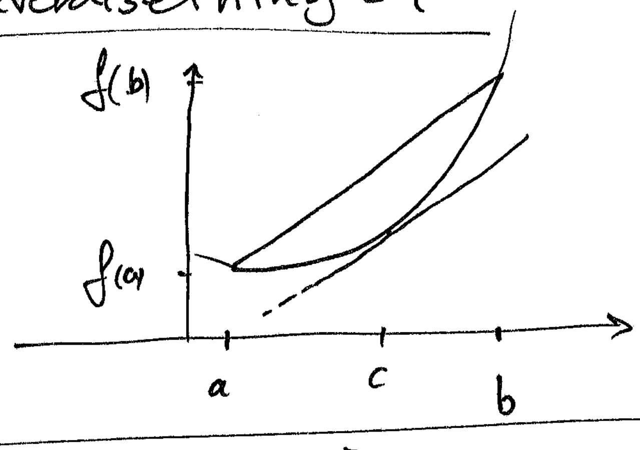
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\pi r^3\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{dr^3}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{\pi}{3}\cdot 3r^2\frac{dr}{dt}$$

$$= \pi r^2\frac{dr}{dt}.$$ så $$\underline{\frac{dh}{dt} = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt}}$$

$$\underline{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}}$$

Middelverdisetningen



$f(x)$ kontinuerlig på $[a, b]$
deriverbar på (a, b)

Det finnes en $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

$s(t)$ posisjon
$\frac{d}{dt} s$ fart.

"gjennomsnitsfarten blir realisert som farten i et tidspunkt"

Bevis Avgrenser oss til tilfellet hvor $f(a) = f(b) = 0$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$g(a) = 0 \ , \ g(b) = 0, \ g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$g(x) \equiv 0$ på $[a, b]$ da e $g'(x) \equiv 0$ ✓

Hvis ikke finnes det maksimums og/eller minimumsverdier i (a, b) fra ekstremalverdisetningen.

Den deriverte i et (lokalt) ekstremalpunkt må være lik 0.

så det finnes en $c \in (a, b)$ slik at $g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 .$$ Resultatet er bevist.

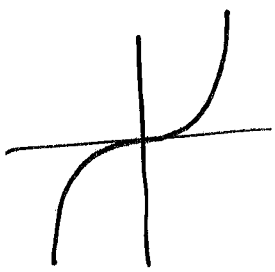
$f(x)$ er voksende hvis $f(x) \le f(y)$ når $x \le y$
— strengt — $f(x) < f(y)$ når $x < y$

Tilsvarende : avtagende

Monotoni egenskaper

Hvis $f'(x) \geq 0$, da er $f(x)$ voksende
$f'(x) \le 0$, da er $f(x)$ avtagende.

$y = x^3$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 3x^2 \geq 0$ så funksjonen er voksende



strengt voksende (men y' er ikke ekte positiv i alle punkt)
(deriverte er lik 0 i origo)

bevis : Anta $f'(x) \geq 0$, Hvis funksjonen ikke er voksende, da finnes $x < y$
$f(x) > f(y)$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

Fra middelverditeoremet finnes det en $c \in (x, y)$
slik at $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$. En motsigelse

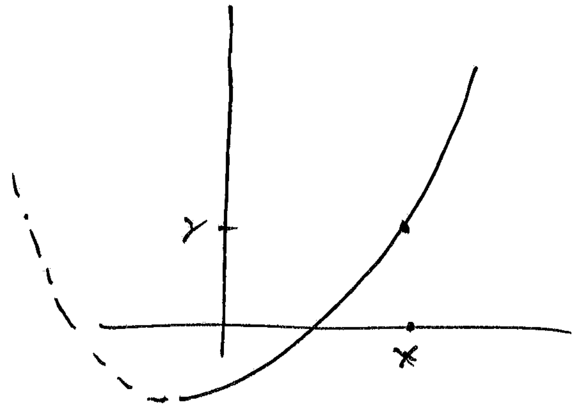
så $f(x)$ er voksende.

—

Eks. Vis at $f(x)$ $e^x - 3\sqrt{x}$ har akkurat én løsning på intervallet $[1, 2]$.

$f(1) = e - 3 < 0$ $\qquad f(2) = e^2 - 3\sqrt{2} > 0$, $f(x)$ kont. og deriverbar.
ved skjæringssatsen finnes minst én løsning.
$f'(x) = e^x - \frac{3}{2\sqrt{x}} \geq e - \frac{3}{2} > 0$. $f(x)$ vokser på $[1, 2]$. Likningen $f(x) = 0$ kan ikke ha mer enn én løsning.

Inversfunksjoner

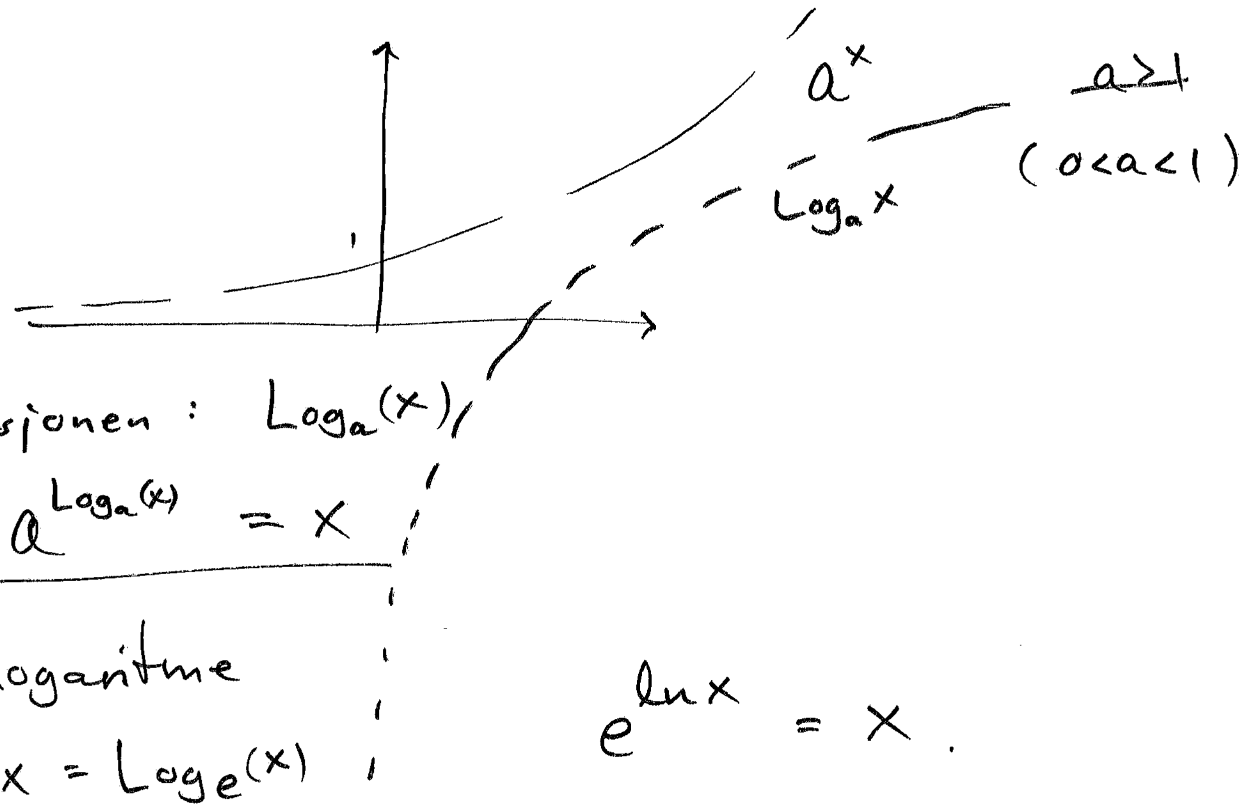


$f(x)$ er injektiv (en-til-en) hvis
$f(x) = f(y)$ fører til at $x = y$.

(Stigende / avtagende funksjoner er injektive
men injektive funksjoner trenger ikke være stigende/avtagende)

Hvis f er injektiv, da finnes det en inversfunksjon
f^{-1}. $\qquad \underline{f(f^{-1}(y)) = y}$.

Eksempler



inversfunksjonen : $\mathrm{Log}_a(x)$

$$\underline{a^{\mathrm{Log}_a(x)} = x}$$

Naturlig logaritme
$\ln x = \mathrm{Log}_e(x)$ $\qquad e^{\ln x} = x$.

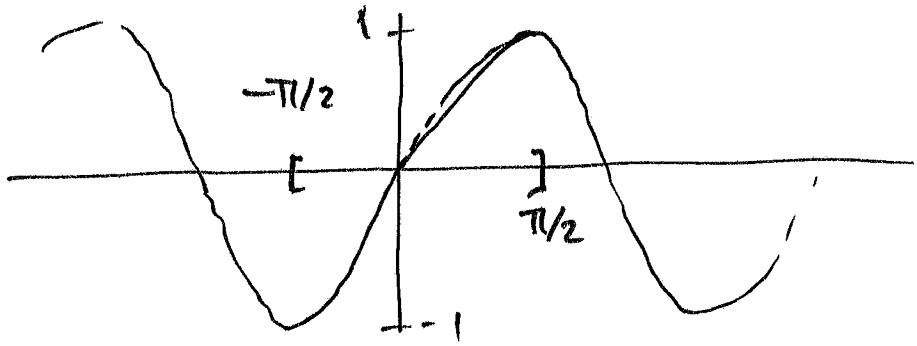
Logaritmereglene

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^p) = p \ln a.$$

Sin x



$\sin x$ avgrenset til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ er injektiv.

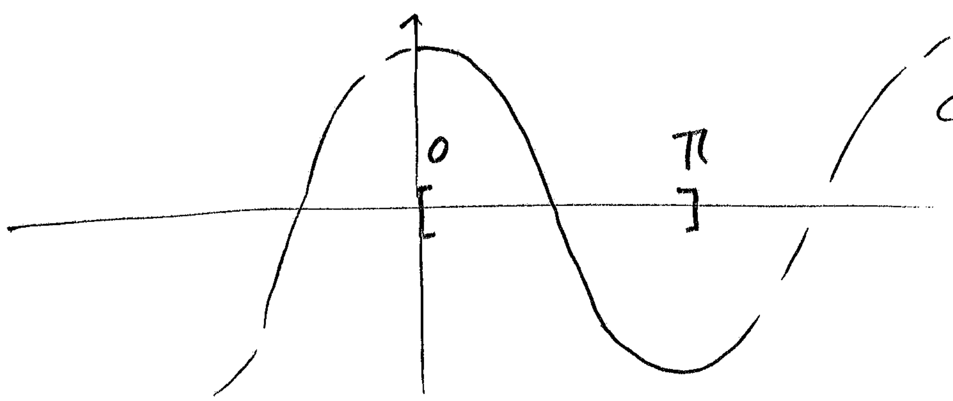
Inversfunksjonen er $\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

def. på $[-1, 1]$.

Verdimengden er $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

men $\arcsin(\sin(x))$ er bare lik x når $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$!



cos.

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad \text{deriverer m.h.t } x:$$

$$\frac{d}{dx} f\left(f^{-1}(x)\right) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$f(x) = e^x, \qquad f^{-1}(x) = \ln x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{(\ln x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \sin x \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

$$f(x) = \tan x \qquad f^{-1}(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$$