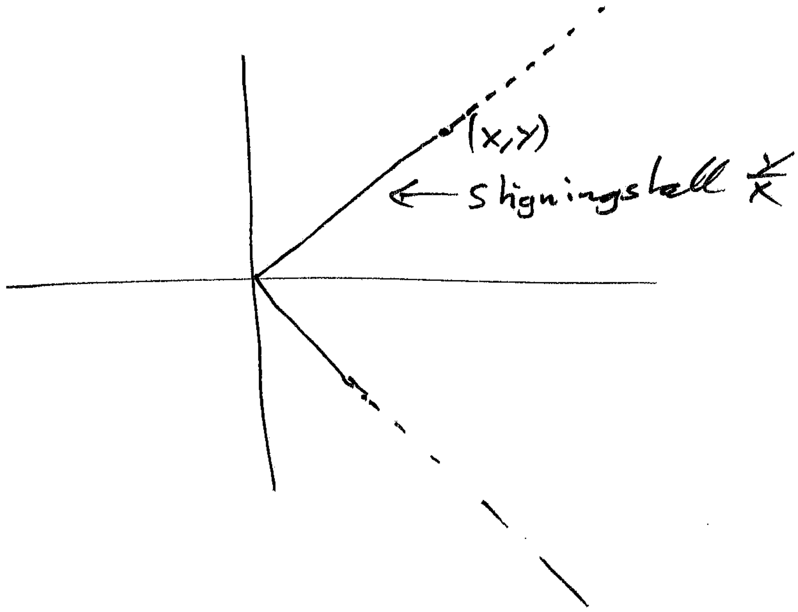
26.10.2015

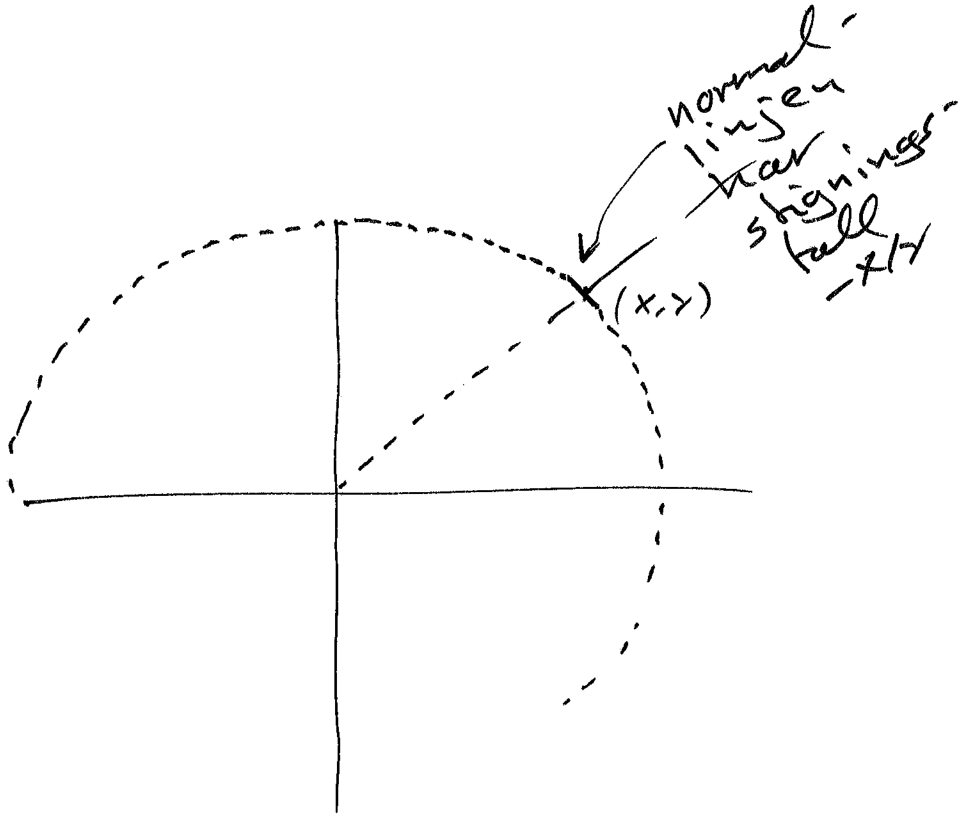
Eulers metode (eksempler)

1. $y' = \frac{y}{x}$

"Finner løsninger geometrisk"



$y' = \frac{-x}{y}$



Implementering i matlab ligger på hjemmesiden.

Separable differensiallikninger

(2) $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ funksjon av x $\overset{\text{gange}}{\bullet}$ funksjon av y

$(g(y) \neq 0)$

$$g(y)\, y' = f(x)$$

$$\underbrace{\int g(y)\, y'\, dx}_{\text{substitusjon}} = \int f(x)\, dx$$

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

La $G(y)$ være en antiderivert til $g(y)$

— $F(x)$ — " — $f(x)$

Løsningene er

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(G(y(x)) - F(x) \right) = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dF}{dx} \right.$$

$$= g(y)\, y' - f(x) = 0$$

$$\left. \Leftrightarrow \quad G(y(x)) - F(x) = C \quad \text{(konstant} \right)$$

Eksempler

(3)

$$y' = \frac{-x}{y} \quad \text{separabel}$$

$$y \cdot y' = -x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$$

$$y \cdot dy = -x\,dx$$

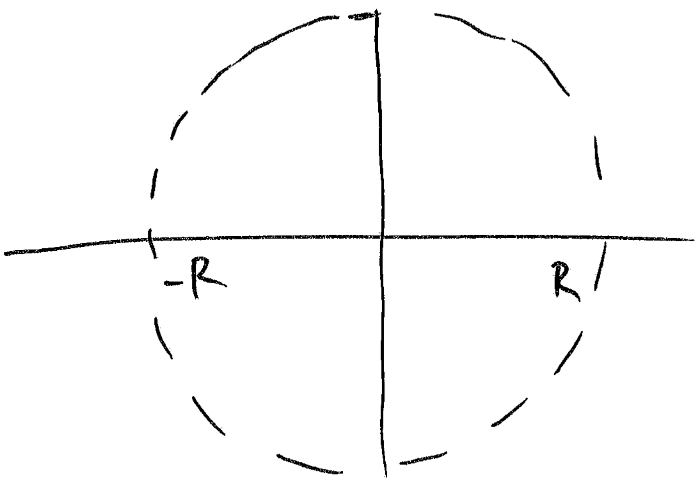
integrerer:

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$x^2 + y^2 = 2c \quad (= R^2)$$

sirkel med radius R



$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad |x| \leq R$$

eller

$$y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \qquad |x| \leq R$$

eller delintervaller.

$y' = k \cdot y$ "naturlig vekst"

Radioaktiv nedbryting

(5) Forrenting

Rentesats $r\%$

$$y' = \frac{r}{100} \cdot y$$

$$y' = ky \qquad \text{separabel}$$

$$\frac{y'}{y} = k \qquad (y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\, dx$$

$$\ln|y| = k \cdot x + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kx+c} = (e^c) \cdot e^{kx}$$

$$|y| = (e^c) \cdot e^{kx}$$

$$y(x) = A e^{kx} \qquad A \neq 0.$$

$y(x) \equiv 0$ (lik 0 for alle x)

er også en løsning. $y' = 0 = k \cdot y$ ✓.

Løsningene $\underline{y(x) = A e^{kx}}$ A reelt tall

$y' = \frac{y}{x}$ separabel

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$ $(y \neq 0)$

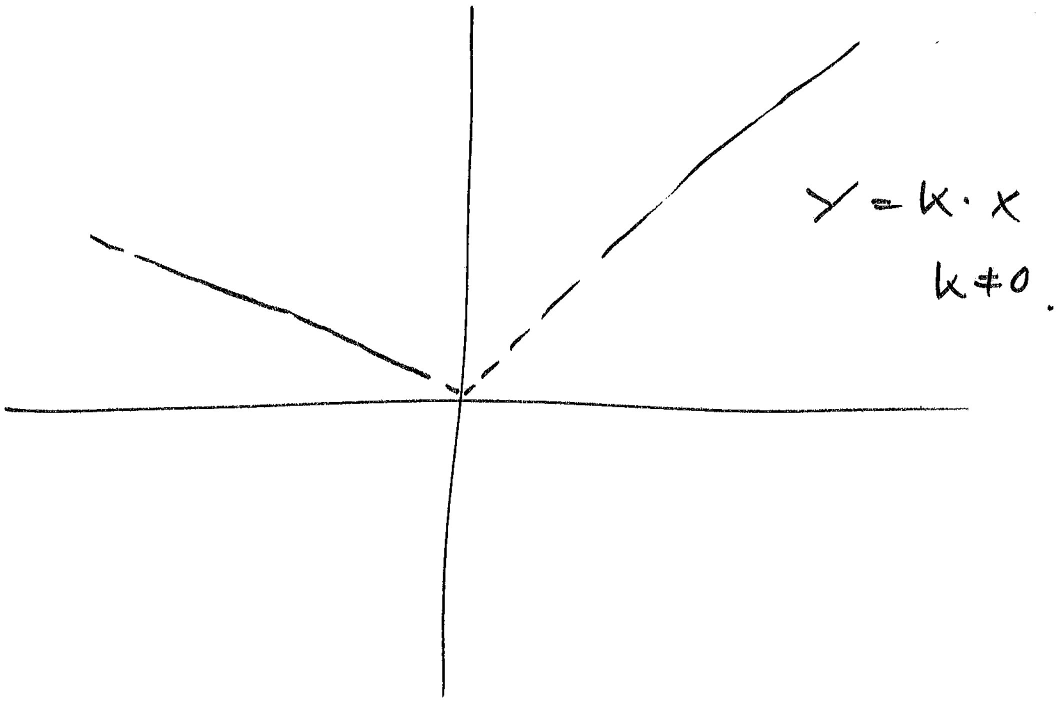
6 $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln|y| = \ln|x| + c$

så

$|y| = |x| \cdot e^c$

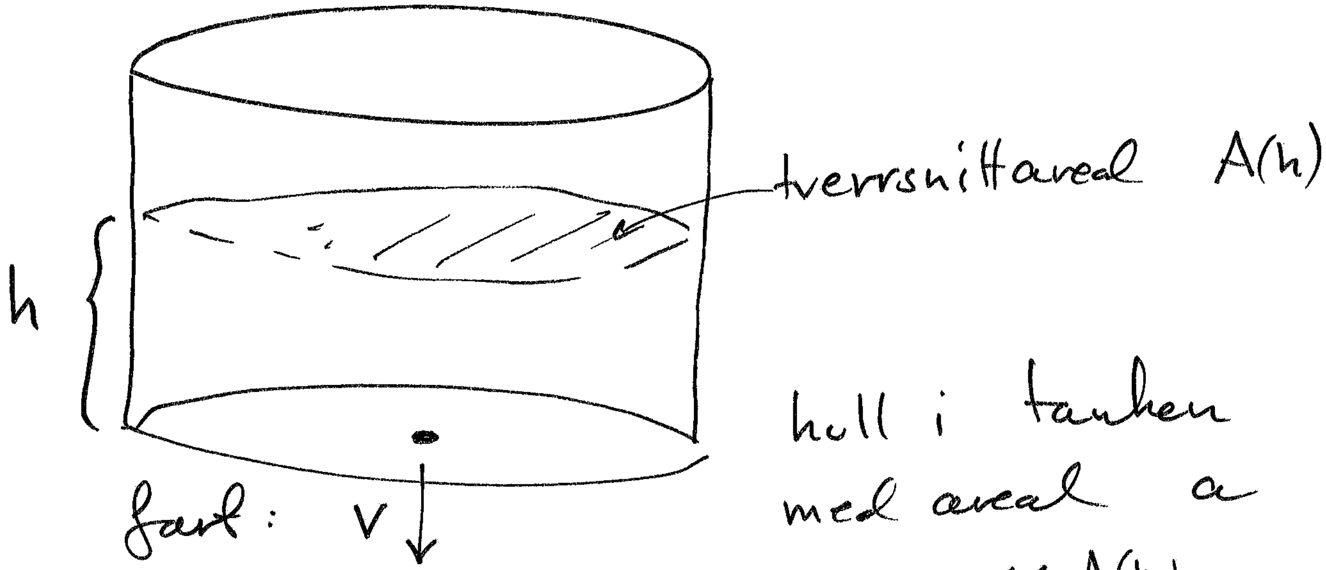
$y = k \cdot x$ $x \neq 0$



(samt $y \equiv 0$)

7

Torricellis lov



$a \ll A(h)$

(a liten i forhold til A)

$V(h)$ volum.

massetetthet ρ.

$$\frac{dV}{dt} = -a \cdot v$$

$$\frac{dV(h)}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \qquad \text{kjerneregelen}$$

$$= A(h)\,\frac{dh}{dt}$$

Tap av potensiell energi i dt (tidsintervallet $[t, t+\Delta t]$)

$$h \cdot g \cdot \rho \frac{dV}{dt} \cdot dt$$

Kinetisk energi til væsken som renner ut i dt

$$\rho \cdot \frac{dV}{dt} \cdot dt \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2$$

$$h \cdot g \cdot \rho \frac{dV}{dt}\, dt \underset{\uparrow}{=} \rho \frac{dV}{dt}\, dt \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2$$

Energibevaring

$$v^2 = 2h \cdot g \quad , \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$v = -\frac{1}{a} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{a} A(h) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{A(h)}{a} \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A(h)} \sqrt{2g \cdot h}}$$

Torricellis lov

Sylinderbeholder $\quad A(h)$ konstant.

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{a}{A}\sqrt{2g}\right) \cdot \sqrt{h} = -k\sqrt{h}.$$

$$\left(k = \frac{a}{A}\sqrt{2g}\right)$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -k\,dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh = \int h^{-1/2}\, dh = \frac{h^{1/2}}{1/2} = -k \cdot t + C$$

$$\sqrt{h} = -\frac{k}{2} \cdot t + C'$$

$$h(t) = \left(C' - \frac{k}{2} \cdot t\right)^2$$

$$h(0) = H \quad \text{gir} \quad C' = \sqrt{H}$$

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t\right)$$

→

Tiden det tar å tømme beholderen:

(8) $h(t) = 0$ gir $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{A}{a}$

Modellen er gyldig for

$$0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{A}{a}.$$

Hvis $A(h)$ ikkje er konstant:

separabel diff. likning

$$\frac{A(h)}{\sqrt{h}} h'(t) = -a\sqrt{2g}$$

$$\int \frac{A(h)}{\sqrt{h}} dh = -a\sqrt{2g} \cdot t + c.$$

Spesielt er $h'(t)$ konstant når

$\frac{\sqrt{h}}{A(h)}$ er konstant.

For rotasjons legemer med $A(h) = \pi r^2$:

$\pi r(h)^2 = \text{konstant} \cdot \sqrt{h}$. Så

$$r(h) = \text{konstant} \cdot \sqrt[4]{h}$$

Logistisk diff. likning.

5 $$y'(t) = k\, y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{N}\right)$$ $k>0$, $N>0$

y er liten : $y' \sim k \cdot y$

når y nærmer seg N så vil $y' \to 0$.

veksten stopper opp. (vi passerer ikke verdien N).

separabel diff. likning:

$$\frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{N}\right)} = k$$

$$\int \frac{1}{y(1-y/N)}\, dy = kt + c.$$

$$\int \overbrace{\frac{1}{y} + \frac{1/N}{\left(1-\frac{y}{N}\right)}}\, dy$$ delbrøksoppspalting

$$= \ln|y| + -\ln\left|1-\frac{y}{N}\right| = kt + c$$

$$\ln\left(\frac{y}{1-y/N}\right) = k\cdot t + c$$

$$\left|\frac{y}{1-y/N}\right| = e^{kt}\cdot e^{c}$$

$$\frac{y}{1-y/N} = A e^{kt}$$

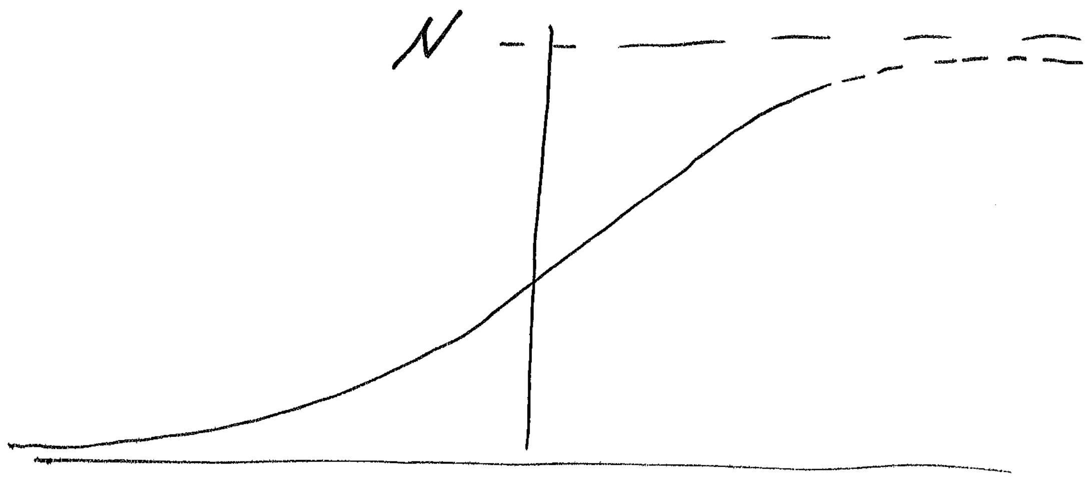
$$y = \left(1-\frac{y}{N}\right)A e^{kt} = Ae^{kt} - y\cdot \frac{A}{N} e^{kt}$$

$$y\left(1 + A\cdot\frac{1}{N} e^{kt}\right) = Ae^{kt}$$

$$Y(t) = \frac{Ae^{kt}}{1 + A\cdot\frac{1}{N}e^{kt}}\cdot\frac{N}{N} = N\,\frac{Ae^{kt}}{N + Ae^{kt}}$$

6

$$= N\,\frac{1}{(N/A)e^{-kt} + 1}$$



Initialverdi problem:

Anta $Y_0 = Y(0)$ er kjent.

$$Y_0 = N\,\frac{1}{(N/A)\cdot 1 + 1} \qquad \text{så}$$

$$\frac{N}{A}Y_0 + Y_0 = N$$

$$N/A = (N - Y_0)/Y_0$$

Hva skjer hvis
$Y_0 > N$?
$Y_0 < 0$?

Løsningen er

$$Y(t) = N\,\frac{1}{\frac{N-Y_0}{Y_0}e^{-kt} + 1}$$

En annen beskrivelse av løsningene er:

$$Y(t) = N\,\frac{1}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

hvor t_0 er tiden hvor $Y(t) = N/2$.

(hvis $0 < Y_0 < N$)