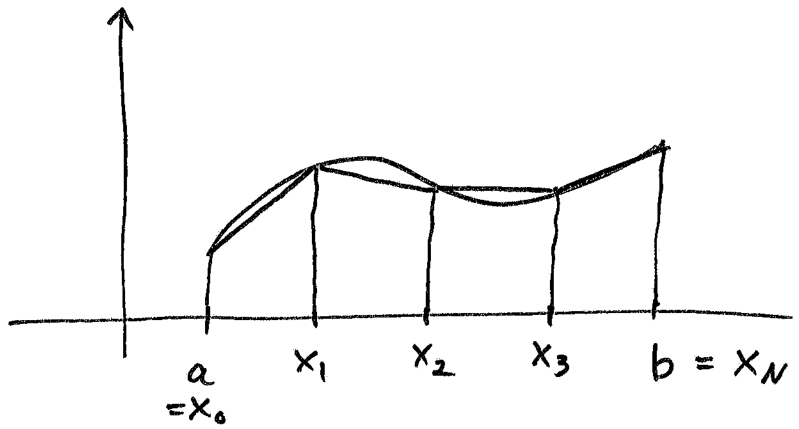
22. oktober
2015

Numerisk integrasjon

(1)



Trapesmetoden

N delintervaller

bredden : $d = \frac{b-a}{N}$

Arealet til trapes nummer n :

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot d .$$

Estimatet med trapesmetoden er

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \cdot d$$

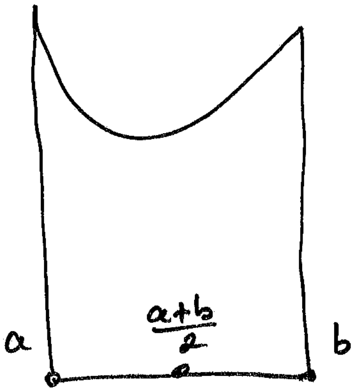
$$= \left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \frac{d}{2}$$

Trapesmetoden er eksakt på alle lineære funksjoner.

implementeringen Simpson.m liggår på hjemmesiden

Simpsons metode.

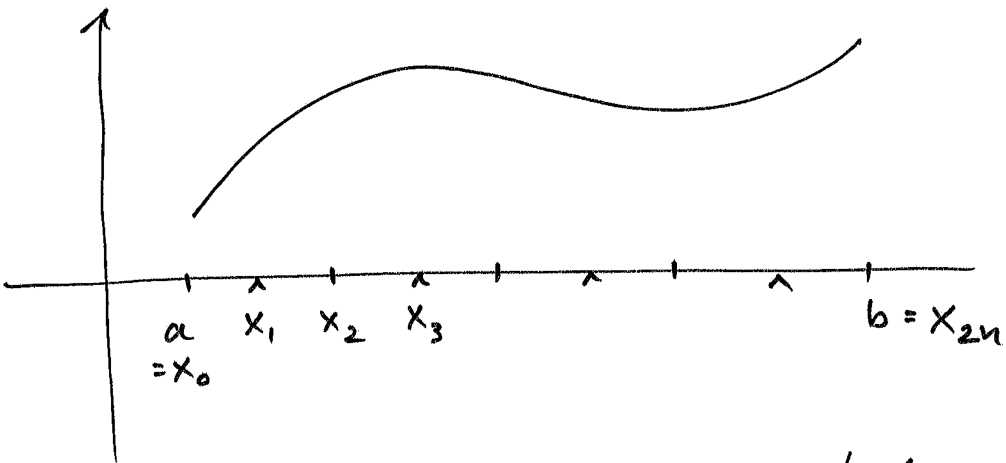
(2)



$\frac{1}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$ vektingen

$$\left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b)\right)(b-a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$ for alle polynomer av grad ≤ 3.



2n del-intervaller

Estimatet ved simpsons metode

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{6}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \Big]$$

Feilen: $$\frac{M_4}{180} \frac{(b-a)^5}{(n)^4}$$

hvor $M_4 \geq |f^{(4)}(x)|$ på $[a,b]$

Differensiallikninger

En differensiallikning for $y(x)$ er en likning i $y(x)$, $y'(x)$, $y^{(2)}(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ og funksjoner i x

			orden
Eks.	$y' = 2\cdot y$	lin. homogen	1
	$y' = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$	—"—	1
	$y' = -\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$	ikkje lin	1
	$y'' + 4\cdot y = 0$	lineær, homogen	2
	$y'' + 4\cdot y = 3\sin x$	lineær, inhomogen	2
	$(y')^2 - y = 2x$	ikkje lin	1
	$y'' = \sqrt{1+(y')^2}$	—"—	2
	$3x\cdot y^{(5)} - \sin x \cdot y^{(3)} + 2\cdot e^x = 0$	lin inhomogen	5

En diff. likning har orden n hvis $y^{(n)}$ forekommer i diff. likningen, og ingen høyere deriverte

En diff. likning er <u>lineær</u> hvis den er på formen

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

En lineær diff likning (som ovenfor)

(4) er <u>homogen</u> hvis $f(x)$ er identisk null
(null for alle x)

ellers: <u>inhomogen</u>

En løsning til en diff. likning er en funksjon $y(x)$ som gjør likningen (påstanden) sann.

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = 2 \cdot e^{2x}$$

så $y(x) = e^{2x}$ er en løsning til diff. likningen $y' = 2 \cdot y$.

$k \cdot e^{2x}$ er også en løsning for alle reelle tall k.

$y(x) = k e^{2x}$ for reelle k er alle mulige løsninger til diff. likningen $y' = 2y$.

⑤ $y' = f(x)$ er en lineær 1 ordens diff. likning.

Løsningene er de antideriverte til $f(x)$!

$$y = F(x) + C$$

$\left(\begin{array}{l} F'(x) = f(x) \\ F(x) \text{ en antiderivert} \\ \text{til } f(x) \end{array} \right)$

$$y'' = 2$$

$$(y')' = 2$$

$$y' = 2x + c_1$$

$$y = x^2 + c_1 x + c_2$$

to parametre som gir alle løsningene.

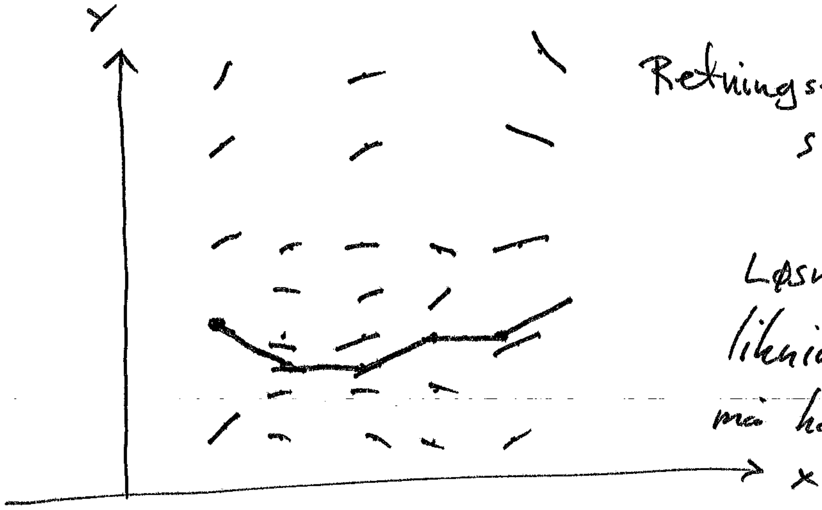
En differensiallikning av orden n har løsninger parametrisert av n reelle tall.

⑥

Eulers metode

Avgrenser oss til diff. likninger på formen

$$y' = F(x,y) \quad \text{funksjon av } x \text{ og } y$$



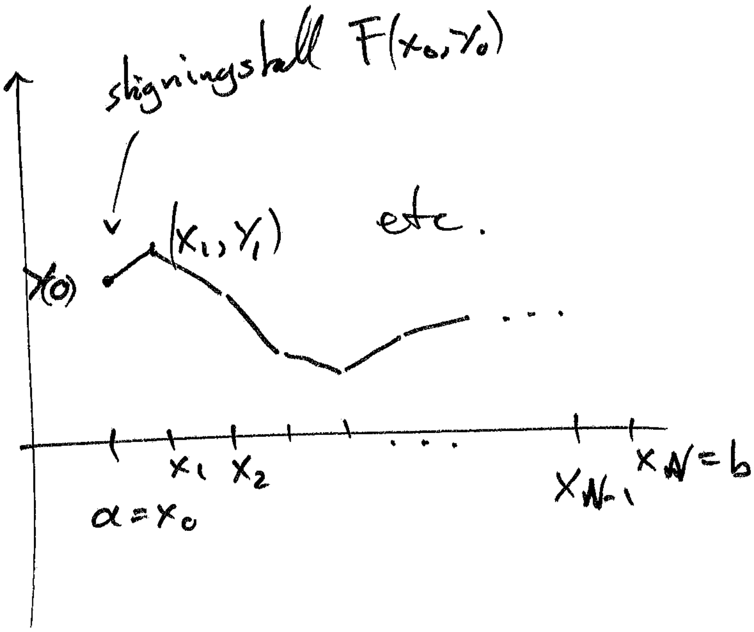
Retningsfelt.
stigningstallet i (x,y) er $F(x,y)$
Løsningen til diff. likningen $y' = F(x,y)$ må ha retningsfeltet som tangenter.

Eulers metode $\quad a \leq x \leq b$.

Deler opp intervallet $[a,b]$ i N biter

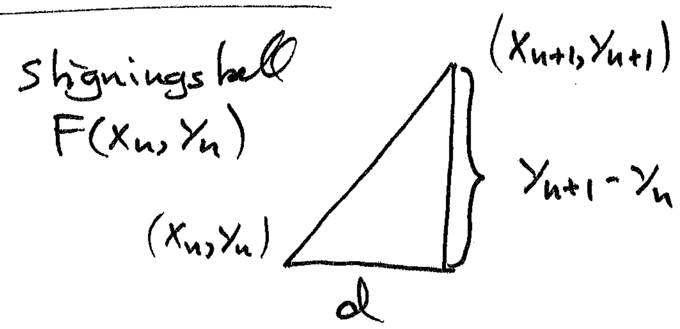
Lengden på delintervallene : $d = \dfrac{b-a}{N}$.

start-verdi (valgt!) →



7

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n) \cdot d$$



pseudokode for implementering av Eulers metode

```
F = @(x,y) = -x/y            % y' = F(x,y)
a = 0        % startverdi for x
b = 2        % sluttverdi for x
N = 100      % antall delintervallene
d = (b-a)/N  % bredde til delintervallene
y0 = 1       % startverdi for y(x)
x = a:d:b                    % 1x(N+1) vektor x0, x1, ..., xN
y = zeros(1, N+1)            % 1x(N+1)-vektor av 0-er
y(1) = y0                    % starter med punktet (a, y0)
for n = 1:N
  y(n+1) = y(n) + d F(x(n), y(n))   % Benytter Eulers metode til å
                                    % estimere y1, y2 ... yN.
end
plot (x,y)   % plotter estimatet til løsningen av diff. likningen
             % y' = F(x,y) med y(a) = y0 .
```