Forelesning 15/10

Antiderivasjon (4.3)

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$y' = f(x)$$

Sett at vi har en løsning $F(x)$. Da vil også $F(x)+C$ være en løsning. Hvorfor?

$$F'(x) = f(x)$$

$$(F(x)+C)' = f(x)$$

Eksempel:

$$y' = 3x^2$$

$$\Rightarrow \underline{y = x^3 + C}$$

$$\underline{\int 3x^2\,dx = x^3 + C}$$

Teorem: (4.3.3)

Dersom f er kontinuerlig på et intervall I, så har f en antiderivert på I.

Bestemmelse av antideriverte

En del funksjoner har anti-deriverte som ikke kan uttrykkes ved de elementære funksjonene, eksempelvis

$$e^{x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sin x^2, \ldots$$

Men en del funksjoner lar seg antiderivere:

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Antiderivasjon ~~representerer~~ er en lineær operasjon:

$$\int \left(a f(x) + b g(x) \right) dx$$

$$= \int a f(x)\, dx + \int b g(x)\, dx$$

$$= a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

Metoder for antiderivasjon

Substitusjon

Kjerneregelen:

$F = F(u(x))$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}[F] = \overbrace{F'(u)}^{= f(u)} \cdot u'(x)$

Anta at $F(u)$ er antiderivert til $f(u)$ $\left(F'(u) = f(u) \right)$ så er

$F(u) = \int f(u)\, u'(x)\, dx$

Teorem 4.4.1 $\boxed{\int f(u)\, du = \int f(u)\, u'(x)\, dx}$

Dette er idéen ved integrasjon ved substitusjon.

Hvordan løser vi oppgaver ved bruk av substitusjon?

1. Velg hva som skal være $u(x)$.

2. Siden $u'(x) = \frac{du}{dx}$ kan skrives om til $dx = \frac{du}{u'(x)}$, erstattes dx med $\frac{du}{u'(x)}$.

3. x-ene som er igjen i integranden etter punkt (2) skrives om til et uttrykk i u (hvis mulig, ellers gå til 1 og prøv igjen).

Eksempel 1

Regn ut $\int x e^{x^2} dx$.

Løsning: $\int u'(x) f(u(x))\, dx$

Prøver med $f(u) = e^u$

$$u(x) = x^2$$

$$\Rightarrow u'(x) = 2x$$

Erstatter dx med $\frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{2x}$

$$\int x e^{x^2} dx = \int \cancel{x} \cdot e^u \frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$= \int e^u \frac{1}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \int e^u\, du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}}$$

Kontroll: $\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right)'$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} e^{x^2} \cdot \cancel{2}x = \underline{x e^{x^2}} \quad \text{ok}$$

Eksempel 2

Regn ut $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$

Sml med $\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx$

Løsning:

Prøver med $u(x) = \sin x$

$f(u) = u^2$

Erstatter dx med $\frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} \sin^3 x + C}}$$

Kontroll: $\left(\frac{1}{3} \sin^3 x + C\right)'$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos x$$ OK

Trigonometriske identiteter som er viktige når vi regner

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx \quad :$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{cases}$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

Eksempel 3:

Regn ut $\int e^{3x}\,dx$

Løsning:

Velg $f(u) = e^u$, $u(x) = 3x$.

Erstatter dx med $\frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{3}$:

$$\int e^{3x}\,dx = \int e^u \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int e^u\,du$$
$$= \frac{1}{3}e^u + C$$
$$= \underline{\frac{1}{3}e^{3x} + C}$$

Kontroll: $\left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right)'$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}e^{3x}\cdot\cancel{3} + 0$$
$$= e^{3x} \quad \text{OK}$$

Delvis integrasjon

Derivasjon av produkter:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Antideriver hver side:

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx$$

$$= \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

Teorem 4.4.7

$$\Rightarrow \boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx}$$

Hensikt: Velg $u(x)$ og $v'(x)$ slik at $\int u'(x)v(x)\,dx$ er lettere å løse enn $\int u(x)v'(x)\,dx$.

Eksempel 1

Regn ut $\int x e^x \, dx$

Sml med $\int u(x) v'(x) \, dx$

Skal vi velge (I) $u(x) = e^x, v'(x) = x$

eller (II) $u(x) = x, v'(x) = e^x$?

Prøver (I): $u(x) = e^x, u'(x) = e^x, v'(x) = x$

$v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^x}_{u} \, dx = \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{v} \underbrace{e^x}_{u} - \int \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^x}_{u'} \, dx$$

Dette er mer komplisert enn $\int x e^x \, dx$.

Prøver (II): $u(x) = x, u'(x) = 1, v'(x) = e^x, v(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \underbrace{\int 1 \cdot e^x \, dx}_{= e^x + C}$$

$$= \underline{x e^x - e^x + C}$$

Kontroll:

$(xe^x - e^x + C)'$

$= x \cdot e^x + 1 \cdot e^x - e^x + 0$

$= \underline{xe^x}$ OK

Eksempel 2

Regn ut $\int \ln x \, dx$

Triks: $\ln x = \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u}$

Løsning: $u(x) = \ln x, u'(x) = \frac{1}{x}, v'(x) = 1, v(x) = x.$

$$\int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u} \, dx = \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \, dx$$

$$= \underline{\underline{x \ln x - x + C}}$$

Kontroll: $(x \ln x - x + C)'$

$= x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x - 1 = 1 + \ln x - 1 = \ln x$

OK

Delbrøkoppspalting (4.5)

Rasjonale funksjoner:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Polynomer.

Ønsker å finne metoder for å bestemme $\int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Kan gjøres ved polynomdivisjon:

Eksempel:

Regn ut $\int \frac{x^3+3x^2+x+5}{x^2+1}\,dx$.

Løsning:

Må skrive integranden på redusert form. Gjør dette ved polynomdivisjon:

$$(x^3 + 3x^2 + x + 5) : (x^2+1) = x + 3 + \frac{2}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l} -\,x^3 \qquad\quad \mp x \\ \hline \qquad 3x^2 + 0\cdot x + 5 \\ \quad -\,3x^2 + 0\cdot x \mp 3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 2 \end{array}$$

Dette betyr at

$$\int \frac{x^3+3x^2+x+5}{x^2+1}\,dx = \int \left(x+3+\frac{2}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int x\,dx + \int 3\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\arctan x + C$$